ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti
Oscillatore Armonico

UNI - Fisica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

OSCILLATORE ARMONICO

EQ. $$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + w^2 x(t) = 0$$

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

se $x(t)$ e $y(t)$ sono soluzioni
$\Downarrow$
$k\,x(t)$ è soluzione
$x(t)+y(t)$ è soluzione

Soluzione generale: $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$
$$= A \sin(\omega t + \varphi)$$
$$= B \cos(\omega t + \psi)$$
$$A = B = \sqrt{a^2+b^2} \qquad tg\varphi = \frac{b}{a} \qquad tg\psi = -\frac{a}{b}$$

Eq. non omogenea corrispondente
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + w^2 x(t) = f(t)$$

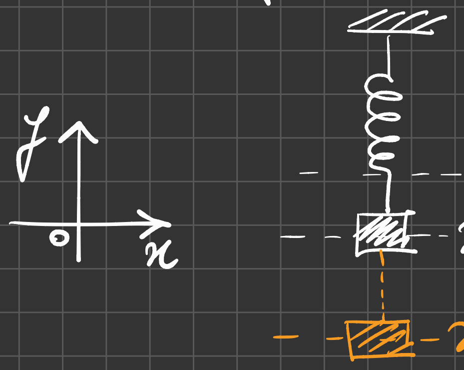
soluzione particolare

Soluzione generale: $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) + x_p(t)$

vale il principio di sovrapposizione.

Eq. non omogenea completa non omogenea
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c\,\frac{d\,x(t)}{d\,t} + w^2 x = 0$$

Esempio



$F_e - P = 0$

$k x_s = mg$

$x = x_s = \frac{mg}{k}$ equilibrio statico

$x = 2x = \frac{2mg}{k}$ tirato e abbandonato

$t=0 \quad v_0 = 0 \leftarrow x(0)$

Determinare la legge oraria del moto

in una posizione generica $F = mg - kx$;

$\downarrow$

$ma = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} = mg - kx$$

$$\ddot{x} = g - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \qquad \text{(eq. non omogenea)}$$

$$x_p = x_s = \frac{mg}{k} \qquad \text{(soluzione particolare)}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k} \qquad \text{(soluzione generale)}$$

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi + \frac{mg}{k} = 2\frac{mg}{k} \xrightarrow{(2)} A = \frac{mg}{k} \\ v(0) = \omega A\cos\varphi = 0 \xrightarrow[(1)]{} \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(condizioni iniziali)

$$x(t) = \frac{mg}{k}\underbrace{\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos(\omega t)} + \frac{mg}{k} = \overbrace{\frac{mg}{k}}^{x_s}(\cos(\omega t) + 1)$$

$$\underbrace{x(t) - \frac{mg}{k}}_{x_s} = \underbrace{\frac{mg}{k}}_{x_s}\cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} x - x_s = x_s \cos(\omega t) \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -x_s \omega \sin(\omega t) \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -x_s \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 (x - x_s) \end{cases}$$

considerazioni: Per effetto di una forza costante // alla forza elastica il centro di oscillazione viene spostato

Energia

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \overbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}^{\text{valore massimo}} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t+\varphi)$$

$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$; $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \overbrace{\frac{1}{2} k A^2}^{\text{valore massimo}} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \overbrace{\left(\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t+\varphi)\right)}^{1} = \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{cost.}$$

In una posizione generica

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2_{(x)} + \frac{1}{2} k x^2 = \text{cost}$$

$$dE_M = \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2} v\, dv + \frac{1}{\cancel{2}} k \cdot \cancel{2} x\, dx = 0$$

Valori medi in un periodo

$$\overline{E_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \overbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}^{\text{valore massimo}} \overbrace{\overline{\cos^2(\omega t + \varphi)}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} E_M$$

$$\overline{E_p} = \frac{1}{2} k \overline{x^2} = \overbrace{\frac{1}{2} k A^2}^{\text{valore massimo}} \overbrace{\overline{\sin^2(\omega t + \varphi)}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} E_M$$

COMBINAZIONE LINEARE
di moti armonici

SULLO STESSO ASSE

Utile, ad esempio, quando vogliamo determinare il moto del centro di massa tra due masse che si muovono di moto armonico sullo stesso asse.

CASO 1 : $k_1 = k_2$ costanti elastiche uguali

$$\omega = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$A_1, \varphi_1 \neq A_2, \varphi_2$ condizioni iniziali differenti

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) & + \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) & = \end{cases}$$

$$x = A \sin(\omega t + \psi)$$

la somma è un moto armonico con la stessa pulsazione

con $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

1) Applicando le formule goniometriche di somma ed uguagliando i coefficienti

2) con la costruzione di Fresnel (proiezione della somma delle risultante tra i vettori posizione)

Caso 2 $\quad k_1 \neq k_2$

$\omega = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 \neq \omega_2$ pulsazioni differenti

$A_1, \varphi_1 \neq A_2, \varphi_2$ condizioni iniziali differenti

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

il moto risultante si determina con la costruzione di Fresnel

Il moto risultante non è armonico semplice poiché l'ampiezza è funzione del tempo (modulaz. d'ampiezza)

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]}$$

per $A_1 = A_2 = A$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = A \sin(\omega_1 t) \quad + \\ x_2 = A \sin(\omega_2 t) \quad = \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}_{A(t)} \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

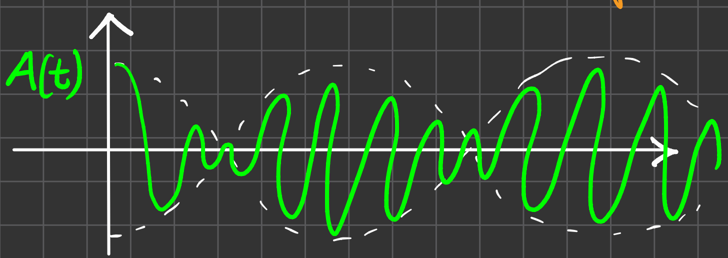
$\Omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ $\qquad \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

Formule goniometriche di Werner

$$x(t) = x_1 + x_2 = \underbrace{2A\cos(\Omega t)}\,\sin(\omega t)$$

Pulsazione $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

Ampiezza modulata con pulsazione $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$



Battimento

SU ASSI ORTOGONALI

caso 1 : $k_1 = k_2$ costanti elastiche uguali

$$\omega = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$A, \varphi_1 \neq B, \varphi_2$ condizioni iniziali differenti

φ = sfasamento tra i moti

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t) \\ y = B \sin(\omega t + \cancel{\varphi}) \end{cases} \; : \; =$$

per $\varphi = 0$
(moti in fase)

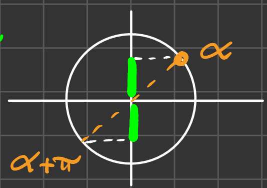
$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} \longrightarrow y = \frac{B}{A} x$$

moto armonico lungo la retta di coeff. angolare $m = \frac{B}{A}$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{B}{A} \rightarrow \theta = \text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t) \\ y = B \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \; : \; =$$

per $\varphi = \pi$
(moti in opposizione di fase)
$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$



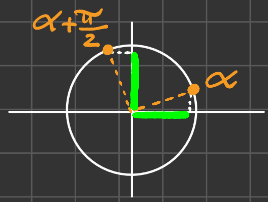
$$\frac{x}{y} = -\frac{A}{B} \longrightarrow y = -\frac{B}{A} x$$

moto armonico lungo la retta di coeff. angolare $m = -\frac{B}{A}$

$$\text{tg}\,\theta = -\frac{B}{A} \rightarrow \theta = -\text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t) \\ y = B\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

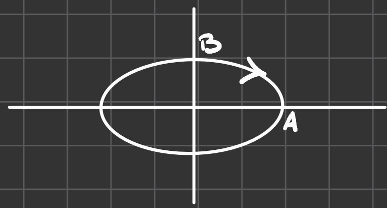
per $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(moti in quadratura)
$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$



$$\begin{cases} \left(\frac{x}{A} = \sin(\omega t)\right)^2 + \\ \left(\frac{y}{B} = \cos(\omega t)\right)^2 = \end{cases}$$

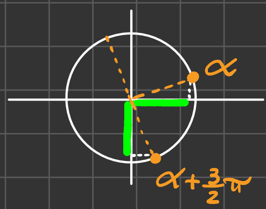
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{1}$$

moto armonico lungo l'ellisse di semiassi A e B e centro nell'origine, percorsa in senso orario



$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t) \\ y = B\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

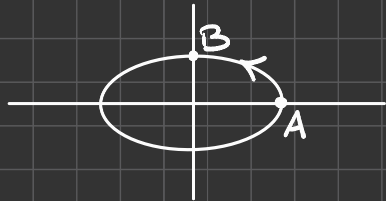
per $\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$\sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos\alpha$



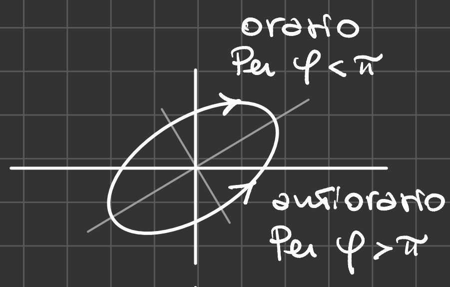
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{A} = \sin(\omega t)\right)^2 + \\ \left(\frac{y}{B} = -\cos(\omega t)\right)^2 = \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{1}$$

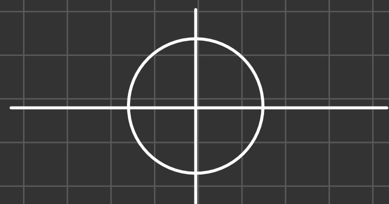
moto armonico lungo l'ellisse di semiassi A e B e centro nell'origine, percorsa in senso antiorario



per φ generico $\longrightarrow$



per $A = B$ $\longrightarrow$

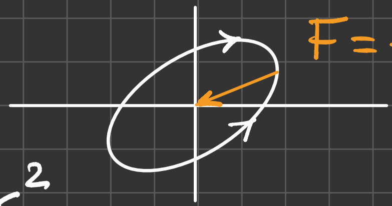


In generale: (fenomeni di polarizzazione)

la somma di due moti armonici con $\omega_1 = \omega_2$ su assi $\perp$ rende un moto piano con traiettoria ellittica.

In alcuni casi l'ellisse degenera in un segmento o in una circonferenza.

La forza che genera il moto è



$$\vec{F} = (-kx \cdot \hat{u}_x, \; -ky\, \hat{u}_y) = -k r$$

con energia potenziale $E_p = \frac{1}{2} k r^2$

e velocità areale costante

(se circolare, velocità angolare costante)

L'energia della forza $\vec{F}$ conservativa è

$$E_K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[A^2 \cos^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$E_M = E_K + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 + B^2) = \frac{1}{2} k (A^2 + B^2)$$

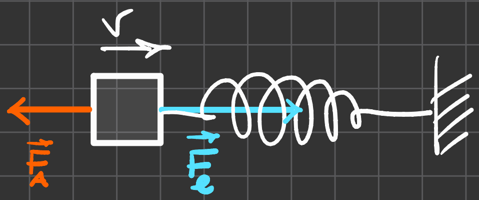
$$\text{con} \begin{cases} E_{M_x} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \\ E_{M_y} = \frac{1}{2} m \omega^2 B^2 = \frac{1}{2} k B^2 \end{cases}$$

Oscillatore Smorzato (presenza di Attrito)

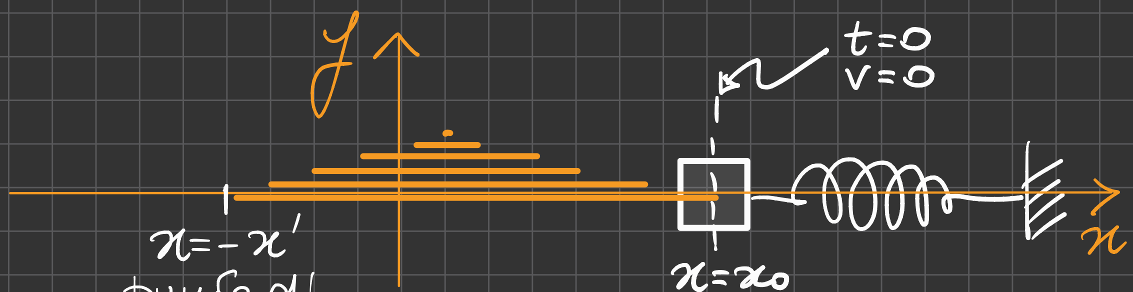
caso 1: Forza d'attrito costante

$$F_A = -\mu m g \hat{u}$$

μ coeff. di attrito dinamico



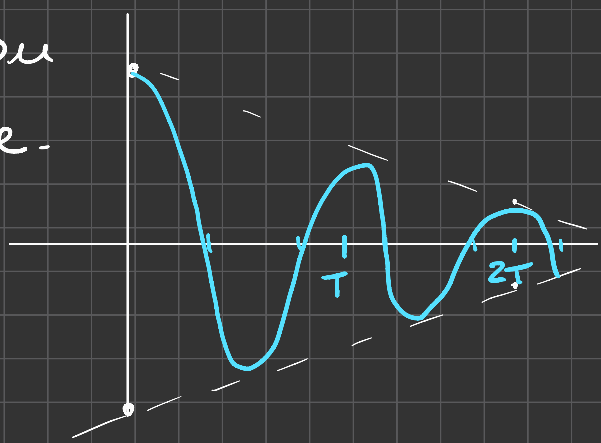
La forza di attrito è in opposizione al moto, compie lavoro negativo. L'energia dell'oscillatore armonico diminuisce fino a fermarsi.



$x=-x'$
punto di inversione del moto
$E_k=0$
$E_p=\frac{1}{2}k(x')^2$

$x=x_0$
Posizione iniziale
$E_k=0$
$E_p=\frac{1}{2}k x_0^2$

l'andamento è sinusoidale con ampiezza linearmente decrescente.



$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ non dipende da μ

T: pseudoperiodo

In uno pseudoperiodo l'ampiezza diminuisce di $\Delta x = 4\frac{\mu m g}{k}$

L'oscillatore armonico rimane in movimento finché $F_e > F_A \rightarrow kx > \mu m g \rightarrow x > \frac{\mu m g}{k}$

caso 2: Forza d'attrito viscoso

$$F_{AV} = -\lambda v$$

La legge del moto è

$$F_e - F_{AV} = ma$$

$$-kx - \lambda v - ma = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

posto $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ coeff. di smorzamento

$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

l'attrito viscoso produce uno smorzamento esponenziale → cerchiamo la soluzione del tipo $x(t) \propto e^{\alpha t}$:

$$\frac{d^2(e^{\alpha t})}{dt^2} + 2\gamma\frac{d e^{\alpha t}}{dt} + w_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + w_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$(\alpha^2 + 2\gamma + w_0^2)e^{\alpha t} = 0$$

$e^{\alpha t}$ ↓ sempre >0

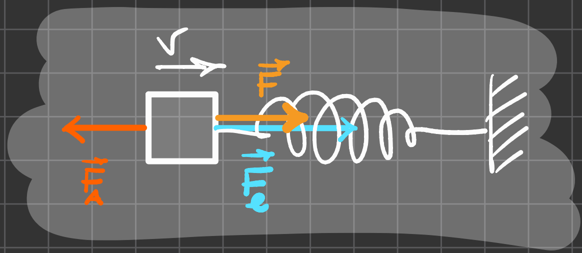
$$\alpha^2 + 2\gamma + w_0^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \gamma^2 - w_0^2 = \frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$$

>0	$\rightarrow \lambda^2 > 4mk$	$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}$
$=0$	$\rightarrow \lambda^2 = 4mk$	$\alpha = -\gamma$
<0		complesse coniugate

Oscillatore Forzato

oscillazioni persistenti anche in presenza di Attrito viscoso (Applichiamo una forza F che annulla l'effetto dell'attrito)



$$F_e - F_A + F = ma$$

$$-kx - \lambda v + F_0 \sin(\omega t) = ma$$

$$ma + \lambda v + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

posto

$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ coeff. di smorzamento

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria

eq. diff. di 2° ordine non omogenea, con $\omega_0 \neq \omega$

Verifichiamo se $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ è una soluzione particolare, con la pulsazione della forza impressa