ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti Gravitazione

UNI - Fisica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

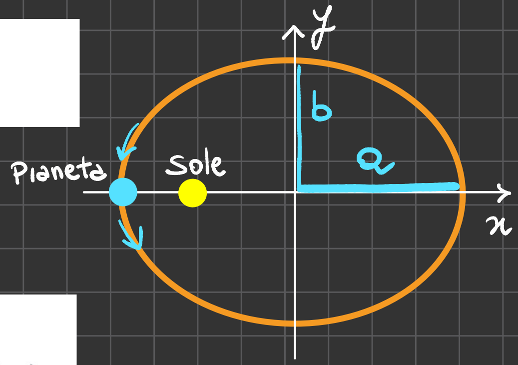
Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

#2

LEGGI DI KEPLERO

Prima legge

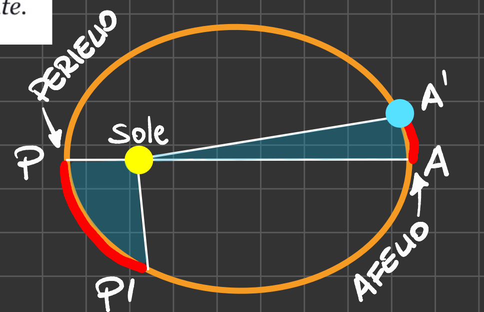
I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.



Eq. ellisse con centro nell'origine $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Seconda legge

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

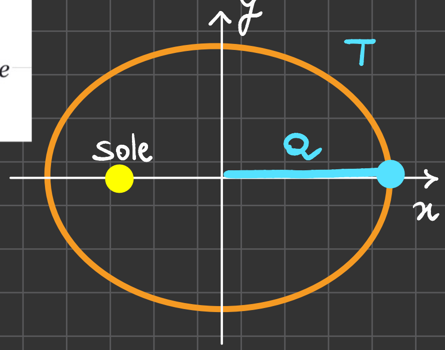


velocità areale $\dfrac{dA}{dt}=\text{cost}$

$v=\dfrac{s}{t}$ → nello stesso tempo, $\overline{PP'}$ è percorso più velocemente di $\overline{AA'}$

Terza legge

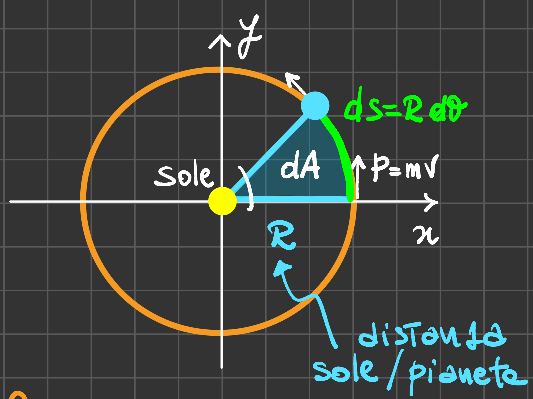
Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = kr^3$ (i valori della costante k sono dati nella tabella del paragrafo 5.6).



$$\frac{a^3}{T^2}=K=\frac{4\pi^2}{MG} \quad G \rightarrow 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg}$$

calcolato di seguito

FORZA GRAVITAZIONALE



se approssimiamo l'ellisse ad una circonferenza ($a \rightarrow R$) possiamo considerare il moto circolare uniforme, infatti:

$dA=\frac{1}{2}R\cdot \underbrace{R\,d\theta}_{ds}$ ≃ area triangolo isoscele

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}R^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dA}{dt}=\text{cost} \rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\omega=\text{cost}$$ moto circ. unif.

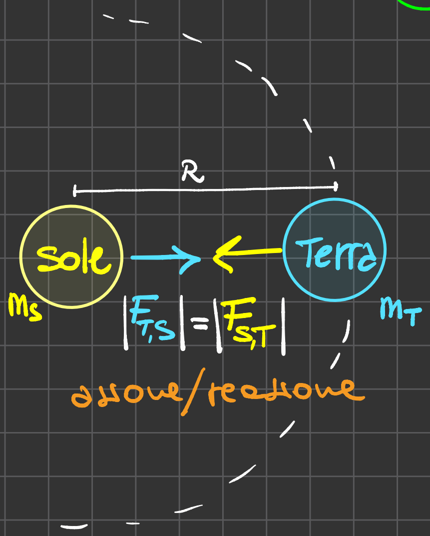
$$L=r\cdot \underset{mv}{p}=R\cdot m\underset{\omega R}{v}=R^2 m\,\omega=\frac{dA}{dt}\cdot 2m=\text{cost.}$$

Dunque la forza è esclusivamente centripeta:

$$F = m a_c = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = mR\frac{4\pi^2}{KR^3} = \frac{4\pi^2}{K}\cdot\frac{m}{R^2}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T^2 = KR^3$ III legge Keplero



$$|F_{T,S}| = |F_{S,T}| \rightarrow \frac{4\pi^2}{K_T}\frac{m_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{K_S}\frac{m_S}{R^2}$$

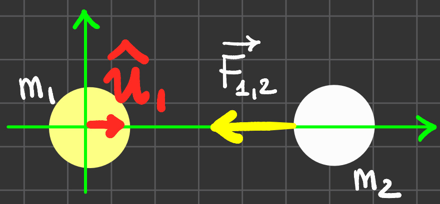
uguali per costruzione

$$m_S\underbrace{\frac{4\pi^2}{m_S K_T}}_{G}\frac{m_T}{R^2} = m_T\underbrace{\frac{4\pi^2}{m_T K_S}}_{G}\frac{m_S}{R^2}$$

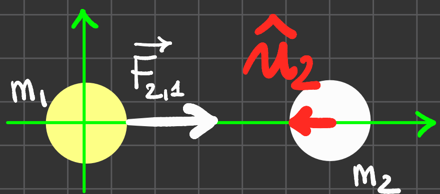
$$F_{T,S} = G\frac{m_T m_S}{R^2} \qquad F_{S,T} = G\frac{m_S m_T}{R^2}$$

E_{g_T} CAMPO GRAVITAZIONALE generato da m_T

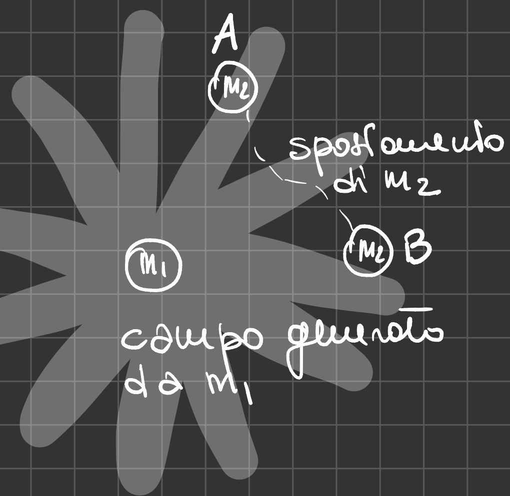
E_{g_S} CAMPO GRAVITAZIONALE generato da m_S



$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{R^2}\hat{u}_1$$



$$\vec{F}_{2,1} = -G\frac{m_2 m_1}{R^2}\hat{u}_2$$



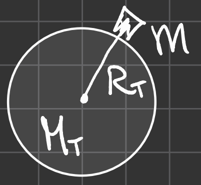
$$W = \int_A^B F\,dr = -\overbrace{\frac{Gm_1m_2}{R_B}}^{|U_B|} + \overbrace{\frac{Gm_1m_2}{R_A}}^{|U_A|} = -\Delta U$$

con $U = -\frac{Gm_1m_2}{R}$

V POTENZIALE GRAVITAZIONALE

la forza è attrattiva ed il corpo tende verso U minori - senza il segno "-" R a denominatore farebbe aumentare il valore di U a distanze inferiori

CORPO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE



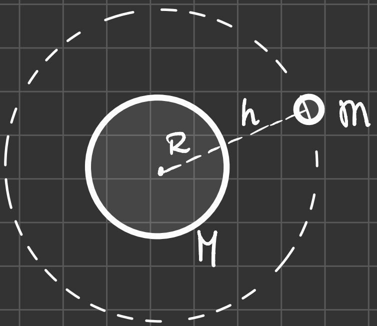
Terra

Un corpo di massa m posto sulla superficie terrestre subisce una forza gravitazionale pari a

Forza Gravitazionale $F=\frac{mM_T}{R^2}G = ma$ II legge Newton

$a=g=9{,}81\ \frac{m}{sec^2}$

SATELLITI (velocità e periodo)



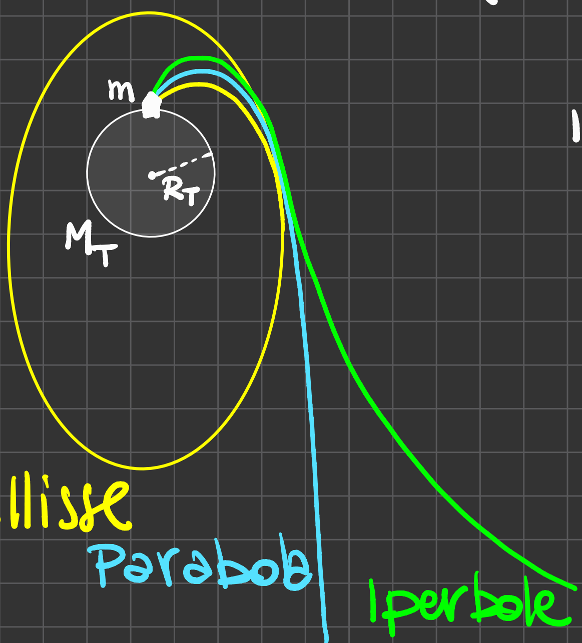
$$F = ma$$

$$\frac{GmM}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h} \rightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{mM}{R+h}}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$

$T=T_{pianeta}$ → geostazionario

SATELLITI (velocità di fuga)



inizio (lancio del satellite)

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ velocità di lancio

$U=-G\frac{mM_T}{R_T}$

fine → ∞

$E_k=0$ soglia inferiore ($E_k\geq 0$) per la fuga

$U_\infty=0$ a distanza infinita

conservazione Energia $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2-\frac{G\cancel{m}M_T}{R_T}=0 \rightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$ V_{fuga}

V_{lancio}:
- $< V_{fuga}$ → ellisse
- $= V_{fuga}$ → parabola
- $> V_{fuga}$ → iperbole

Riassumendo:

III keplero — Periodo di rivoluzione ← T^2; Raggio ← R^3

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{mG} \quad G \to 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg}$$

forza gravitazionale

$$F_{1,2} = \underbrace{G\frac{m_1}{R^2}}_{E_g} m_2$$

Tra due masse a distanza R

campo gravitazionale

$$E_{g_1} = G\frac{m_1}{R^2}$$

generato dalla massa m_1

En. Potenziale gravitazionale

$$U = \underbrace{-G\frac{m_1}{r}}_{V} m_2$$

potenziale gravitazionale

$$V = -G\frac{m}{R} \rightarrow E_g = -\frac{d}{dr}V$$

$$\vec{E_g} = -\nabla V$$

gradiente

Lavoro compiuto dalla forza gravitazionale

$$W = -\Delta U = -m_2 \Delta V$$

velocità di un satellite

$$v = \sqrt{\frac{mM_T}{R_T+h}}$$

periodo di un satellite

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

satellite geostazionario se T = Tpianeta

velocità di fuga

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$