WWW.ALGORITMOSTEM.IT
SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti
Serie Numeriche

UNI - Matematica
rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

Licenza Creative Commons CCBYNCND.
È consentita la condivisone del documento originale a condizione che non venga modificato né utilizzato a scopi commerciali, sempre attribuendo la paternità dell'opera all'autore

SERIE NUMERICHE

#DRAFT

Def $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ serie di termine a_n

somma di tutti i termini della successione a_n

Def Successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad S_n = S_{n-1} + a_n$$

la somma della serie coincide con il limite della successione S_n $\quad S = \lim_{n\to\infty} S_n$

OSS Scopo dello studio della serie è stabilire il comportamento, o carattere (convergente, divergente. se convergente si prosegue con il calcolo della somma (non sempre si riesce)

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\cancel{\longleftarrow}$$

Dim $S_n = S_{n-1} + a_n \rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n}_{S} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}}_{S} = 0$$

es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, anche se $\frac{1}{n} \to 0$
(la condizione $a_n \to 0$ non è sufficiente)

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

CRITERI per lo studio del carattere di una serie

Serie a termini def. positivi (negativi)

- confronto
- confronto asintotico
- Rapporto
- Radice

Serie a termini di segno variabile

- Assoluta convergenza
- Leibniz

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

SERIE A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI (NEGATIVI)

SERIE A TERMINI POSITIVI (NEGATIVI) — convergenti / divergenti $+\infty$ ($-\infty$)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ con } a_n \geq 0 \ (a_n \leq 0) \quad \forall n \geq n^* \in \mathbb{N}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \qquad \text{con } a_n \leq b_n \ \forall n \geq n^* \ n \in \mathbb{N}$$

diverge $\Rightarrow$ diverge ($\not\Leftarrow$)

converge $\Leftarrow$ converge ($\not\Rightarrow$)

es $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$ $\qquad 0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$ converge per il criterio del confronto

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie armonica generalizzata)

es $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$ $\qquad 0 \leq \frac{1}{n^{\log n}} < \frac{1}{n^2}$ ($\log n > 2$ definitivamente)

$\sum \frac{1}{n^{\log n}}$ converge per il criterio del confronto

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie armonica generalizzata)

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

(confronto dell'ordine di infinito o infinitesimo)

Date le serie a term. positivi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \begin{cases} \ell \in (0,\infty) & \text{converge} \iff \text{converge} \\ \ell = 0 & \text{converge} \Leftarrow \text{converge} \\ \ell = \infty & \text{diverge} \Leftarrow \text{diverge} \end{cases}$$

es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n}$$

Termine dominante a numeratore per $n \to +\infty$

Termine dominante a denominatore per $n \to +\infty$

$$\frac{n+\cos n}{n^3-3n} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{n+\cos n}{n^3-3n}$ converge per il criterio del confronto asintotico

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie armonica generalizzata)

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

CRITERIO DEL RAPPORTO

Data la serie a term. positivi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} \ell < 1 & \text{converge} \\ \ell > 1 & \text{diverge} \\ \ell = 1 & ? \end{cases}$$

es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^6} \xrightarrow[\text{rapporto}]{\text{criterio}} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^6}}{\frac{5^n}{n^6}} = \frac{\cancel{5^{n+1}}}{(n+1)^6} \cdot \frac{n^6}{\cancel{5^n}_1} = 5\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 = 5 > 1$$

diverge

es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!} \xrightarrow[\text{rapporto}]{\text{criterio}} \frac{\frac{\cancel{4^{n+1}}\,4}{\cancel{(n+1)!}\,n+1}}{\frac{\cancel{4^n}}{\cancel{n!}\,1}} = \frac{4}{n+1} = 0$$

CRITERIO DELLA RADICE

Data la serie a term. positivi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} \begin{cases} \ell < 1 & \text{converge} \\ \ell > 1 & \text{diverge} \\ \ell = 1 & ? \end{cases}$$

es $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

$$\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}} = (\log n)^{-\frac{\cancel{n}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\log n}}_{+\infty}} = 0 < 1 \text{ la serie converge}$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

SERIE DI SEGNO VARIABILE

a_n non assume segno costante

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

Data la serie di segno variabile $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

converge $\rightarrow$ converge

diverge $\rightarrow$?

CRITERIO DI LEIBNIZ (segno alterno)

Hp data una successione $\{a_n\}$

1) $a_n \geq 0$ definitivamente (termini non negativi)
2) $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (infinitesima)
3) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente (decrescente)

$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ convergente

es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ soddisfa tutte le ipotesi del criterio di LEIBNIZ, quindi converge

es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non è assolutamente convergente ma per il criterio di Leibniz converge

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

SERIE NOTEVOLI

- Telescopica
- Geometrica
- Armonica

Serie TELESCOPICA

la somma parziale S_n è una forma chiusa dipendente dal primo e ultimo elemento a_k

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_k \quad \text{con } a_k = b_{k+1} - b_k \longrightarrow S = \left(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right) - b_{k_0}$$

es Serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$

$$a_k = \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \underbrace{-\frac{1}{n+1}}_{b_{n+1}} - \underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right)}_{b_n} \rightarrow S = \lim_{n\to+\infty} \cancel{\left(-\frac{1}{n+1}\right)}^{0} + 1$$

$$S_n = \underbrace{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{a_3} + \dots \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \cancel{\frac{1}{n+1}}^{0} = 1$$

convergente al valore 1

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{con } q \in \mathbb{R} \qquad S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 & \text{convergente} \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 & \text{Divergente} \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

Esempio $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge al valore $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

[1] $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $<$ $\alpha > 1$ converge; $\alpha \leq 1$ diverge $+\infty$

[2] $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ $<$
- $\alpha > 1 \ \forall \beta$ converge
- $\alpha = 1 \ \beta > 1$ converge
- $\alpha = 1 \ \beta \leq 1$ diverge
- $\alpha < 1 \ \forall \beta$ diverge

[3] $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{e^{\gamma n} n^\alpha (\log n)^\beta}$
- $\gamma > 0$ converge $\forall \alpha \ \forall \beta$
- $\gamma < 0$ diverge $\forall \alpha \ \forall \beta$
- $\gamma = 0$ [2]

es $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$a_n \simeq b_n$ per $n \to \infty \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

diverge $\leftarrow$ diverge $(b_n \xrightarrow{n} \nrightarrow 0)$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Esercizio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

0) a termini positivi.

1) Stabiliamo se converge:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n}}{(n+1)\cancel{n}(n-1)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

confronto asintotico $\rightarrow$ converge

2) calcoliamo la somma della serie

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{(telescopica)}$$

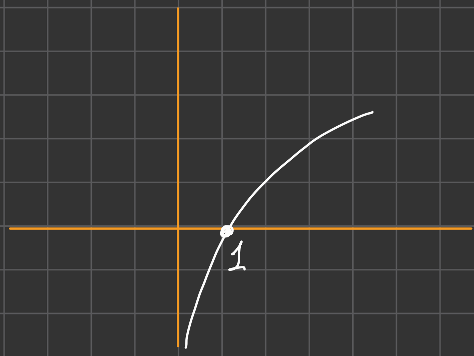
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \underbrace{1}_{b_1} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{b_{n+1}}$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{0}\right) = 1$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\sin n}{2n^5+\log n+n}$$



1) Stabiliamo se è a termini pos. (neg)

$$a_n = \frac{n^3+\sin n}{2n^5+\log n+n}$$

$-1<\sin n<1$
quindi
$n^3+\sin n \geq 0$

il denominatore è sempre >0 per $n\geq 1$

2) Determiniamo il carattere

$n^3+\sin n \to +\infty$

$2n^5+\log n+n \to +\infty$

$$\frac{n^3}{2n^5} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0 \quad o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie converge

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

ESAME Feb 2021

3 The set of convergence of the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2^n}{n^2(5+6^n)}(x-9)^n$$

$$\sum \frac{2+2^n}{n^2(5+6^n)}(x-9)^n \quad a_n$$

$$\sim \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\,3^n}$$

$(<|3|^n)$ per $6<x<12$ $\rightarrow$ $a_n \sim \left(>\frac{1}{n^2}\right)$

$(>|3|^n)$ per $x<6 \vee x>12$ $\rightarrow$ $a_n \sim \left(<\frac{1}{n^2}\right)$

$(=|3|^n)$ per $x = \begin{cases} 6 \\ 12 \end{cases}$ $\rightarrow$ $a_n \sim \frac{1}{n^2}$

per confronto asintotico converge per $6 \leq x \leq 12$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it