ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

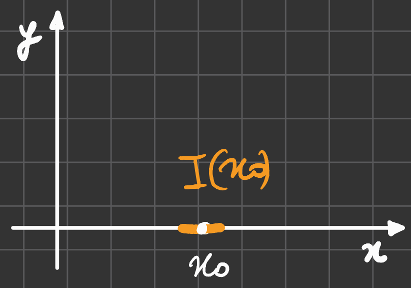
Appunti
Funzioni di due variabili
(Dominio, limiti, derivate, differenziale)

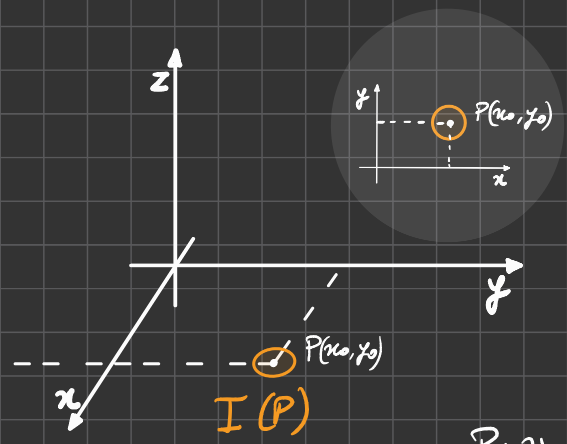
UNI - Matematica

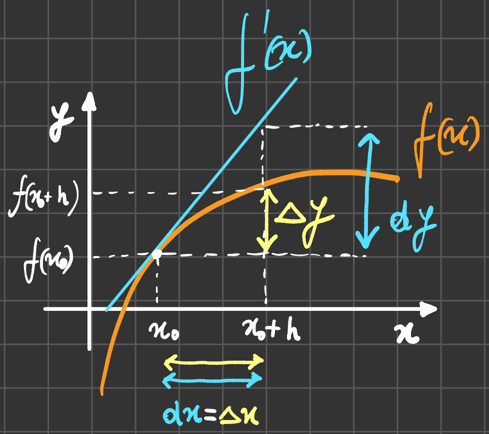
rev.0.1 - 05 set 2023

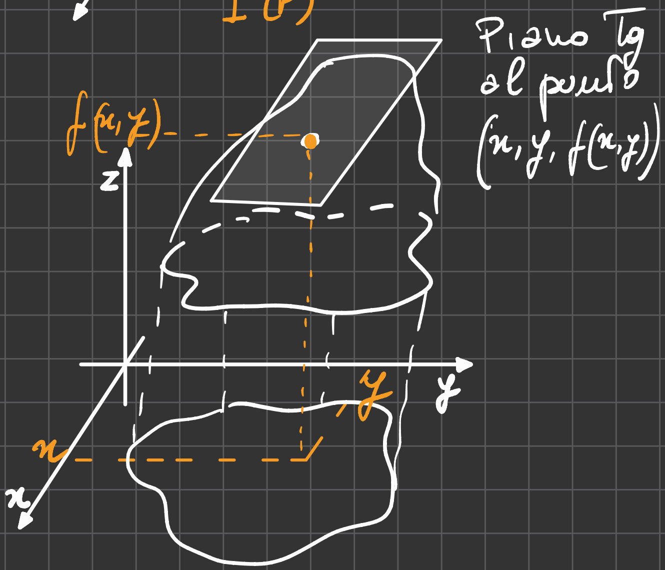
Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.







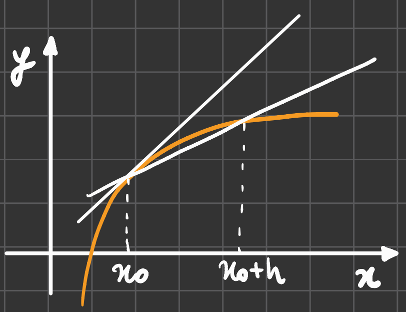


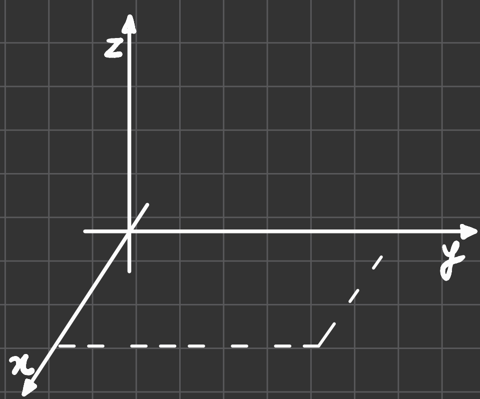
$$dy = f'(x)\,dx$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\cdot h$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

devono $\exists$ le derivate parziali





$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h,k\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)\cdot h - f'_y(x_0,y_0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$\boxed{f(x,y) \in C^1} \to \boxed{\text{differenziabile}}$ → $\boxed{\text{continua}}$ ↔ $\boxed{\text{derivabile}}$

ESISTENZA DEL LIMITE in (x_0, y_0)

(x_0, y_0) punto di accumulazione per $f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \leftarrow \quad |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

piccolo a piacere

in un intorno di (x_0, y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty \quad \leftarrow \quad |f(x,y)| > M$$

grande a piacere

in un intorno di (x_0, y_0)

CONTINUITÀ in (x_0, y_0)

$(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ $\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

DERIVABILITÀ in (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \exists \text{ finito}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad \exists \text{ finito}$$

DIFFERENZIABILITÀ in (x_0, y_0)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0,y_0)\cdot h - f_y(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Condizioni di esistenza per $f(x,y)$
(Dominio Naturale)

Dominio più esteso in R^n

1) Denom $\neq 0$
2) $\sqrt[n]{g(x,y\dots)}$ n pari $\rightarrow g(x,y\dots) \geq 0$
3) $\log(g(x,y\dots)) \longrightarrow g(x,y\dots) > 0$
4) $\operatorname{tg}(g(x,y\dots)) \longrightarrow g(x,y\dots) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ESEMPIO

(a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{4x-3-x^2-y^2}}$

$f : D \subseteq R^2 \rightarrow R$

<u>condizioni di esistenza</u>

$$\begin{cases} [1] & 4x-3-x^2-y^2 \neq 0 \\ [2] & \dfrac{x^2+y^2}{4x-3-x^2-y^2} \geq 0 \end{cases}$$

numeratore $> 0 \ \forall (x,y) \in R^2$
deve essere denom. > 0

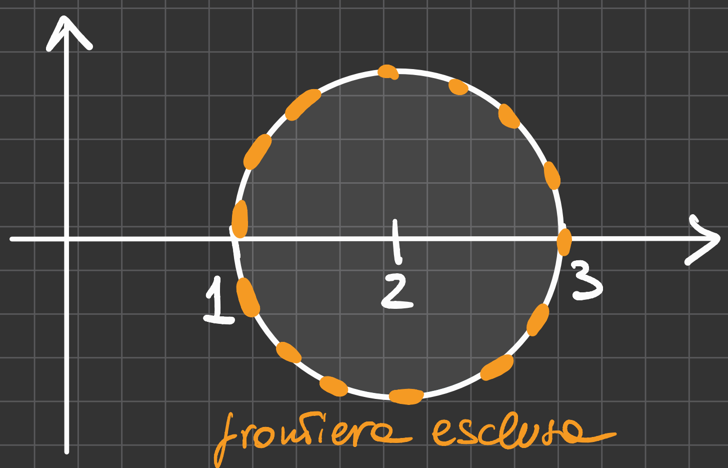
Le condizioni [1] $\wedge$ [2] diventano:

$$-x^2-y^2+4x-3>0 \rightarrow x^2+y^2-4x+3<0$$

circonferenza

centro $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (2,0)$

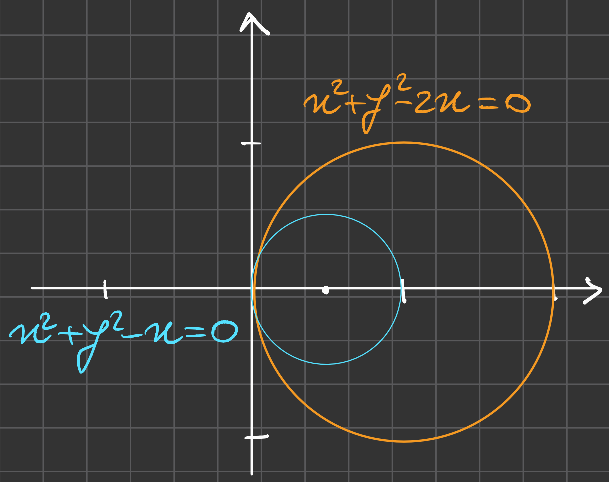
raggio $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c} = \sqrt{4-3} = 1$



ESEMPIO

$$(b)\ f(x,y) = \sqrt{\frac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$$

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$



condizioni di esistenza

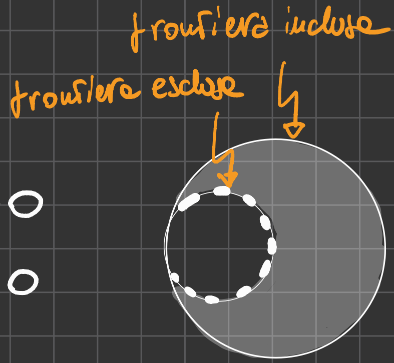
circonferenza $x^2+y^2-2x=0$, $C(1,0)$ $r=1$

$$[1]\ \left\{ \frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-x} \geq 0 \right.$$

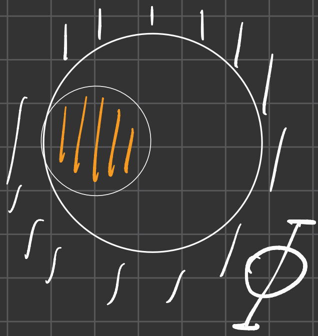
circonferenza $x^2+y^2-x=0$, $C=\left(\frac{1}{2},0\right)$ $r=\frac{1}{2}$

$$[2]\ x^2+y^2-x \neq 0$$

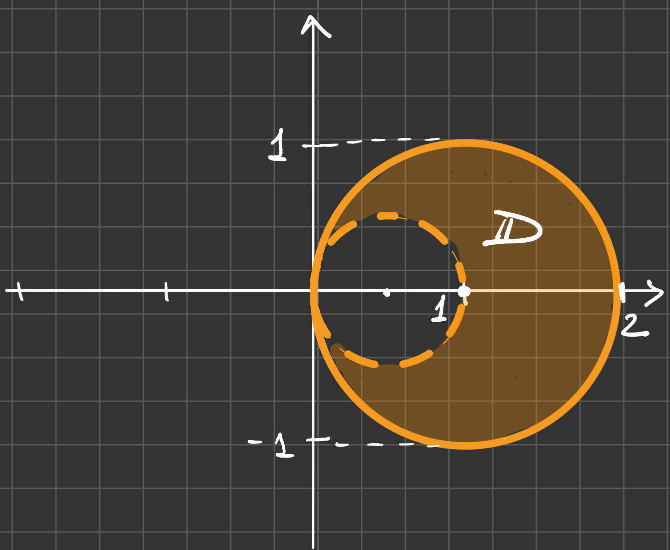
$$[1.1]\ \begin{cases} 2x-x^2-y^2 \geq 0 \\ x^2+y^2-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x \leq 0 \\ x^2+y^2-x > 0 \end{cases}$$



$$[1.2]\ \begin{cases} 2x-x^2-y^2 \leq 0 \\ x^2+y^2-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x \geq 0 \\ x^2+y^2-x < 0 \end{cases}$$



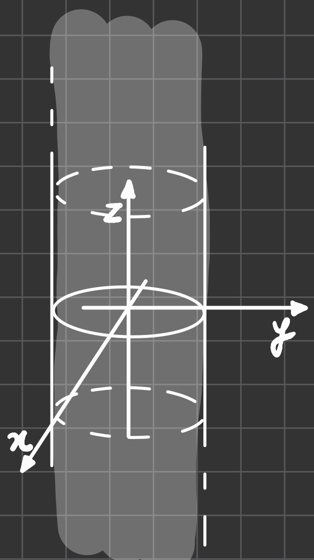
$$[2]\ x^2+y^2-x \neq 0$$



ESEMPIO

$$\text{(e) } f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{z+1}}$$

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

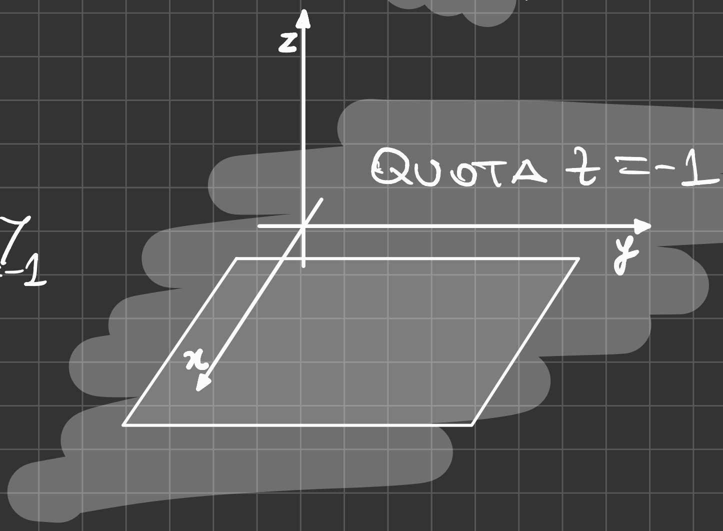


condizioni di esistenza

$x^2+y^2=1$ in $\mathbb{R}^3$ cilindro con base circonferenza $c(0,0)$ $r=1$

$$\begin{cases} [1] & \dfrac{x^2+y^2-1}{z+1} \geq 0 \\ [2] & z+1 \neq 0 \end{cases}$$

$z+1=0$ piano xy quota $z=-1$



$$\begin{cases} [1.1] & \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ z+1>0 \end{cases} \\ [1.2] & \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ z+1<0 \end{cases} \\ [2] & z+1 \neq 0 \end{cases}$$

[1.1] EXT. cilindro frontiere incluse, semipiano superiore

[1.2] INT. cilindro frontiere incluse, semipiano inferiore

[2] $z+1 \neq 0$ già incluse in $[1.1] \wedge [1.2]$

LIMITI $f(x,y)$

$\lim_{x,y\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ se esiste, deve essere unico.

Un procedimento di calcolo consiste nel considerare restrizioni del Dominio:

1) retta $x = x_0 \Rightarrow f(x_0, y)$
2) retta $y = y_0 \Rightarrow f(x, y_0)$
3) rette passanti per (x_0,y_0)
   provo con $m=1$ ed m generico $y-y_0=(x-x_0) \Rightarrow f(x, y-x_0+y_0)$
4) Curve che bilanciano i "pesi" delle potenze
   (cerco di ottenere $Deg(Num) = Deg(Den)$)

   es: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y}$ scelgo la restrizione $y=x^2 \Rightarrow f(x,x^2) = \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}$

Se ottengo risultati diversi concludo che il limite non esiste.
Altrimenti devo dimostrare che il limite sia quel valore λ, passando a coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad |f(\rho,\theta) - \lambda| \to 0$$

Tutti i termini a num stesso grado
Tutti i termini a denom stesso grado

NB se $f(x,y)$ è omogenea di grado $Deg(f) = \frac{Deg(N(x,y))}{Deg(D(x,y))}$
(rapporto tra il grado del polinomio a numeratore e a denominatore):

$$Deg(f) = \begin{cases} >0 \longrightarrow \text{limite } \lambda = 0 \\ =0 \longrightarrow \nexists \text{ limite} \\ <0 \longrightarrow \text{limite } \lambda = \pm\infty \text{ (se esiste)} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$$

$x=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0$

$y=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0$

$y=x \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) \overset{*}{=} \frac{x^3}{4x^2+x^4} = 0$

$y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5} \neq 0$

concludo che il limite $\nexists$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Anche: omogenea di grado 1 $\rightarrow 0$

$x=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$

$y=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=0$

$y=x \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) \overset{*}{=} \frac{x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}}=0$

Passiamo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \left| \frac{\rho\cos\theta \cdot \cancel{\rho^2}\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}} \right| \leq \rho \rightarrow 0$$

Concludiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$$

$x=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$

$y=0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=0$

Passiamo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \left|\rho^2\cos\theta\sin\theta\log(\rho^2)\right| \leq \rho^2\left|\log(\rho^2)\right| \rightarrow 0$$

Concludiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$x=0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) \overset{*}{=} \frac{y^2}{y^2} \to 1$

$y=0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) \overset{*}{=} \frac{x^3}{x^2} \to 0$

$y=mx : f(x,mx) = \frac{m(m-2)}{1+m^2} \to$ varia al variare di m

Concludo che $\nexists$ limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$$

$y=mx : f(x,mx) = \frac{m^4x^4}{m^2x^2+m^4x^4} \to 1$

$y=x^{\frac{1}{2}} : f(x,x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

concludo che $\nexists$ limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin xy}{x^2+y^2}$$

$x=0 : f(0,y) = \frac{0}{y^2}$ indeterminato

$y=0 : f(x,0) = \frac{0}{x^2}$ indeterminato

Passiamo a coordinate polari $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

per $\alpha\to 0$ $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\left| \frac{\cancel{\rho}\cos\theta \cdot \sin(\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta)}{\rho^{\cancel{2}}} \right| \leq \left| \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho}} \right| \leq \rho \to 0$$

Concludo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin xy}{x^2+y^2} = 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^\alpha + 2y)\ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

esaminarne la continuità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si osserva facilmente che f non è continua in $(0,0)$ se $\alpha < 0$ (in tal caso il limite non esiste).
Se $\alpha = 0$ si ha $f(x,y) = (1+2y)\log(x^2+y^2)$ quando $(x,y) \neq (0,0)$. Anche in questo caso f non risulta continua in $(0,0)$, dato che, avvicinandosi all'origine lungo l'asse y, si ha

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(1+2y)\log(y^2) = -\infty.$$

Quando $\alpha > 0$ si prova la continuità in $(0,0)$ utilizzando la proprietà (I) per dimostrare che il limite vale 0.

1) $\alpha < 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{x^{|\alpha|}} + 2y\right) \ln(x^2+y^2)$

$\nexists$ limite in $(0,0)$

2) $\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad (1+2y)\left(\ln(x^2+y^2)\right)$

$\nexists$ limite in $(0,0)$

3) $\alpha > 0 \quad \rightarrow \quad (x^\alpha + 2y)\ln(x^2+y^2)$

per $y = mx$: $(x^\alpha + 2mx)\ln(x^2 + m^2x^2) =$

$= (x^\alpha + 2mx)\ln\left(x^2(1+m^2)\right) \xrightarrow{(0,0)}$ indet.

x^α vince su $\ln$ $\rightarrow 0$

conversione a coordinate polari

$$\left|\left(\rho^\alpha \cos^\alpha(x) + 2\rho \sin x\right)\left(\ln \rho^2 \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}\right)\right| \leq$$

$$\leq (\rho^\alpha + 2\rho)\left|\left(\ln \rho^2\right)\right| \leq (\rho^\alpha + 2\rho)\rho^2 \rightarrow 0$$

R) f è continua in $(0,0)$ per $\alpha > 0$

DERIVABILITÀ DI $f(x,y)$

f è derivabile $\forall (x_0,y_0) \in dom(f)$
se $\exists$ derivate parziali in (x_0,y_0)

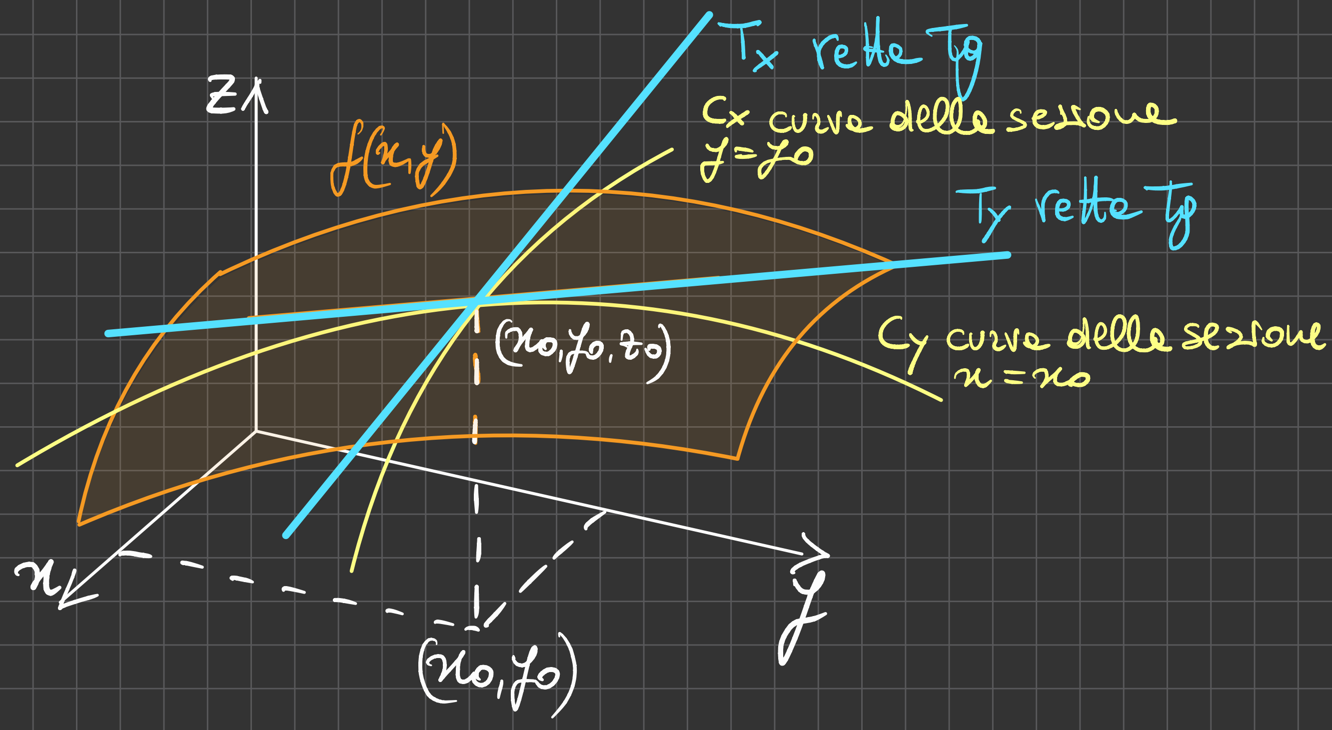
limite del rapporto incrementale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

DERIVATE PARZIALI

Significato geometrico:
pendenza della retta tg ad $f(x,y)$ nel punto (x_0,y_0,z_0), rispetto alla sezione di intersezione $x = x_0$ oppure $y = y_0$



In forma parametrica:

$$C_x:\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0)\end{cases} \qquad \big(t, y_0, f(t,y_0)\big) \qquad \text{al variare di}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial(t)}{\partial t}, \frac{\partial(y_0)}{\partial t}, \frac{\partial f(t,y_0)}{\partial t}\right) = \big(1, 0, f_x(t,y_0)\big)$$ Vettore tangente (componenti derivate)

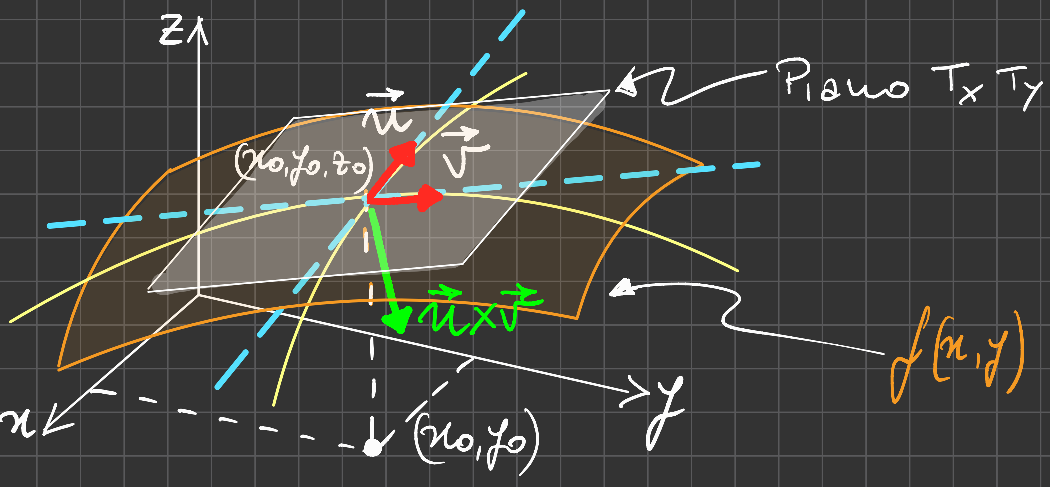
$$\vec{u}\Big|_{t=x_0} = \big(1, 0, f_x(x_0,y_0)\big)$$ Vettore tangente in $P(x_0, y_0, z_0)$

$$C_y:\begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t)\end{cases} \qquad \big(x_0, t, f(x_0,t)\big) \qquad \text{al variare di } t$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial(x_0)}{\partial t}, \frac{\partial(t)}{\partial t}, \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial t}\right) = \big(0, 1, f_y(x_0,t)\big)$$ Vettore tangente (componenti derivate)

$$\vec{v}\Big|_{t=x_0} = \big(1, 0, f_y(x_0,y_0)\big)$$ Vettore tangente in $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} +1,1 & -1,2 & +1,3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \big(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\big)$$



regola mano dx

$\vec{u}\times\vec{v} \perp$ piano $T_x T_y$ quindi tale piano ha eq.:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

DERIVATE SUCCESSIVE

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$f_{xy} = f_{yx}$ Teorema di SCHWARZ: se f'' miste sono continue, allora sono uguali

DERIVATE DIREZIONALI

di $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0)
lungo la direzione del versore $v = (v_x, v_y)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv_x, y_0+tv_y) - f(x_0,y_0)}{t} \quad \text{se } \exists \text{ finito}$$

In forma vettoriale: $D_v(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

prodotto scalare tra il gradiente della funzione nel punto (x_0, y_0) e il vettore direzione normalizzato $\left(\vec{v}/\|\vec{v}\|\right)$

DIFFERENZIABILITÀ di $f(x,y)$

$f(x,y)$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in D$

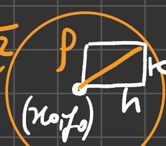
<u>sse</u>

1) $\exists$ derivate parziali in (x_0, y_0)
2) $$\lim_{h,k \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\,h - f_y(x_0,y_0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Significa che la differenza tra la funzione $f(x,y)$ ed una funzione lineare $L(x,y)$ deve essere un infinitesimo in un intorno del punto (x_0,y_0), ovvero rispetto al raggio $\to 0$

Quindi, in un intorno di (x_0,y_0) possiamo approssimare $f(x,y)$ ad $L(x,y)$

variazione di $f(x,y)$ — funzione lineare — $o(\rho)$ $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = L(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

ESEMPIO

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^4}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Studiare la differenziabilità di $f(x,y)$ in $(0,0)$

1) Verifichiamo la continuità in $(0,0)$, se non è continua non è differenziabile.

$$\left|\frac{x^3y^4}{x^6+y^4}\right| \le |x^3| \xrightarrow{(0,0)} \boxed{0 = f(0,0)}$$

$\frac{y^4}{x^6+y^4} \le 1$

$f(x,y)$ è continua in $(0,0)$

altro modo: coordinate polari

$$\left|\frac{\rho^3\cos^3 x\cdot\rho^4\sin^4 x}{\rho^6\cos^6 x+\rho^4\sin^4 x}\right| = \left|\frac{\cancel{\rho^7}\,(\cos^3 x\cdot\sin^4 x)}{\cancel{\rho^4}\,(\rho^2\cos^6 x+\sin^4 x)}\right| \le \rho \to 0$$

limitata ... limitata

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^6+0}-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0$$

NB se $\Delta Y = 0 \Rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta x}=0$

il limite del rapporto incrementale è la retta $y=0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3k^4}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^6+k^4)} = 0$$

$$\left|\frac{h^3k^4}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^6+k^4)}\right| \le \left|\frac{h^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \left|\frac{h^3}{h}\right| \to 0$$

$\frac{k^4}{h^6+k^4}\le 1$

$f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$

Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE

(condizione sufficiente di differenziabilità)

se $f(x,y): D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\in C^1$ D aperto
(ammette derivate parziali continue in D aperto
allora $f(x,y)$ è differenziabile in D aperto

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Piano Tangente
rappresenta il piano tangente alla funzione nel punto (x_0,y_0). Quindi una funzione è differenziabile in un punto se $\exists$ il piano tg passante per quel punto in un intorno del punto $(x_0,y_0,z_0) \to f(x,y) \approx z$

Polinomio di Taylor I°ordine
z corrisponde al polinomio di Taylor di primo ordine della funzione $f(x,y)$ nel punto x_0, y_0

TEOREMA

se $f(x,y)$ è differenziabile in D $\to$ è continua in D

TEOREMA

se $f(x,y)$ è differenziabile in D
ammette derivate direzionali $\forall$ direzione.
Il differenziale si esprime con il prodotto scalare:

$$\vec{v}(a,b) \to \quad \nabla f \cdot \vec{v} = f_x \cdot a + f_y \cdot b$$

ESEMPIO

Verificare la differenziabilità in (0,0) della funzione: $f(x,y) = x^2 \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$$

nel punto (0,0) sono funzioni continue poiché composizione di funzioni continue. Quindi la funzione è differenziabile in (0,0)

ESEMPIO

Determinare l'eq. del piano tangente alla funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ nel punto (0,1,1)

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$z = f(0,1) + 2\overset{0}{x_0}(x-\overset{0}{x_0}) + 2\overset{1}{y_0}(y-\overset{1}{y_0})$$

$$z = 1 + 2y - 2 = 2y - 1$$

3. *Data la funzione* $k(x,y) = \ln \dfrac{x-y^2}{y}$, *provare che* k *è differenziabile nel suo dominio; trovare il polinomio di Taylor di ordine 1 che approssima* $k(x,y)$ *in un intorno di* $E{=}(2,1)$.

$Dom(k)$ corrisponde a tutti i punti del piano che soddisfano le relazioni $y \neq 0$ e $\frac{x-y^2}{y} > 0$, quindi $Dom(k) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 \wedge y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y^2 \wedge y < 0\}$. E' immediato verificare che k è continua sul suo dominio, inoltre con il calcolo diretto si ottengono $\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$ e $\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = -\frac{x+y^2}{y(x-y^2)}$, che su $Dom(k)$ sono continue come si controlla facilmente.
Quindi k è differenziabile nel suo dominio.
Il polinomio di Taylor di ordine 1 che approssima k in E è

$$P(x,y) = f(2,1) + \frac{\partial k}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial k}{\partial y}(2,1)(y-1) = 0 + 1(x-2) - 3(y-1) = 1 + x - 3y.$$

$f(x,y) = \ln \dfrac{x-y^2}{y}$ continua in $Dom(f)$

$$Dom(f): \begin{cases} y \neq 0 \\ \dfrac{x-y^2}{y} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y^2>0 \\ y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y^2<0 \\ y<0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot \cancel{\frac{1}{y}}}{\frac{x-y^2}{\cancel{y}}} = \frac{1}{x-y^2} \quad \text{continua in } Dom(f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x-y^2}{\cancel{y}}} \cdot \frac{-2y \cdot y-(x-y^2)}{y^{\cancel{2}}} = -\frac{x+y^2}{(x-y^2)y} \quad \text{continua in } Dom(f)$$

$f(x,y)$ è derivabile e le derivate sono continue
quindi $f(x,y)$ è differenziabile.

Polinomio di Taylor (ordine 1) in $I(E=(2,1))$
è il piano tg ad $f(x,y)$ nel punto $E=(2,1)$

$$P(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1) = 1+x-3y$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

provare che f è derivabile ma non continua in $O=(0,0)$.

verifica della continuità: deve risultare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right)^2=f(0,0)=1$$

per $y=mx \to \left(\frac{x^4-m^2x^2}{x^4+m^2x^2}\right)^2=\left(\frac{\cancel{x^2}(x^2-m^2)}{\cancel{x^2}(x^2+m^2)}\right)^2 \xrightarrow{(0,0)} 1$

per $y=kx^2 \to \left(\frac{x^4-k^2x^4}{x^4+k^2x^4}\right)^2=\frac{x^4(1-k)}{x^4(1+k)} \xrightarrow{(0,0)}$ dipende da k $\nexists$ limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right)^2=\nexists$$ $f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\overset{1}{\cancel{\left(\frac{h^4-0}{h^4+0}\right)^2}}-1}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\overset{1}{\cancel{\left(\frac{0-k^2}{0+k^2}\right)^2}}-1}{k}=0$$