ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Algebra1: Cardinalità

UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

CARDINALITÀ (ALIAS n° elementi dell'insieme)

Def $|A|$ classe di equivalenza $[A]_\sim$ rispetto alla relazione di equipotenza $\sim$
($\exists$ funzione biunivoca)

Tra insiemi con n° di elementi finiti è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca solamente se il num di elementi è lo stesso.

Un insieme è finito se non è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme

Tra insiemi infiniti invece si può stabilire una corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi.
(l'insieme è equipotente ad un suo sottoinsieme)

Esempio $\mathbb{N}$ $\mathbb{P}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{Q}$ sono equipotenti
Pari dispari

Tutti gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ vengono detti "numerabili". La cardinalità (potenza) del numerabile è indicata con $\aleph_0$ (alef 0)
(potenza del numerabile)

I numeri reali $\mathbb{R}$ non sono numerabili,
la cardinalità è $\aleph_1$ (alef 1) $\mathfrak{c}$
(potenza del continuo)
Cantor sostiene che $\nexists$ potenze intermedie tra $\aleph$ e $\mathfrak{c}$
Secondo Gödel il problema è indecidibile

CANTOR (diagonale di)

dimostra la cardinalità di $\mathbb{R}$

Supponiamo $\mathbb{R}$ insieme ordinabile, consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ ed in questo intervallo posizioniamo tutti i numeri reali tra 0 ed 1

$\mathbb{R}$: $0,\overset{+1}{2}35714\ldots$
$0,1\overset{+1}{5}7912\ldots$
$0,94\overset{+1}{6}354\ldots$
$0,377\overset{+1}{1}96\ldots$
$\ldots$

$0,3672\ldots$

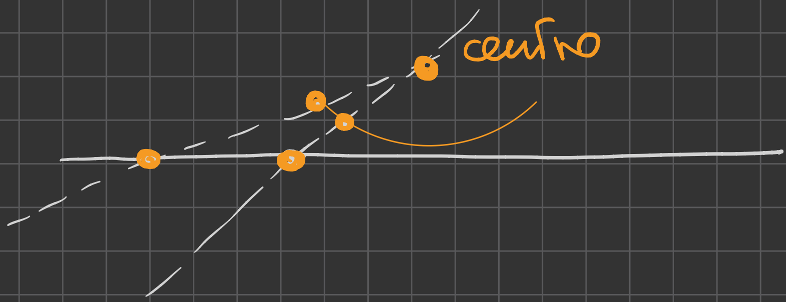
$0,3672\ldots$ ha, per costruzione, almeno una cifra diversa da tutti quelli elencati quindi questo insieme non si può mettere in un ordine e non è equipotente ad $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$

cardinalità

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ $\aleph_0$ alef(0) $\leftarrow$ anche P pari, D dispari, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$ $\aleph_1$ alef(1) $\aleph_1$ alias $\mathfrak{c}$

paradosso: retta e segmento equipotenti

tra segmento ed arco di circonferenza c'è una corrispondenza 1:1 tra i punti, anche se l'arco è più lungo del segmento



tra l'arco e la retta c'è una corrispondenza 1:1 tra i punti, anche se la retta ha lunghezza infinita

quindi stessa cardinalità

SCHEMA x ESERCIZI

potenza del numerabile ($\aleph_0$)

riferimento: $\mathbb{N}$ cardinalità $\aleph_0$

insiemi equipotenti noti:

$\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ numerabili, P pari, D dispari

potenza del continuo ($\mathfrak{c}$)

riferimento: $\mathbb{R}$ cardinalità $\mathfrak{c}$

insiemi equipotenti noti:

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{I}$, $\{0,1,\ldots n\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(A)$ insieme delle parti di A, $\{0,1\}^{A}$ funzione caratteristica,

proprietà:

$\exists f$ biunivoca tra equipotenti

insieme finito e suo sottoinsieme: cardinalità $\neq$

insieme infinito e suo sottoinsieme: cardinalità $=$

$\aleph_0 \leq \cancel{|A|} \leq \mathfrak{c}$ $\quad\nexists$ cardinalità intermedia

STRATEGIE x ESERCIZI

1) **Insiemi finiti** sono equipotenti se hanno lo stesso numero di elementi.

2) **Tra insiemi infiniti**
utilizzando le equipotenze note e le proprietà:

- Risolvere cercando una $f: X \to Y$ biunivoca

  iniettività $\quad f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

  suriettività $\quad \forall x \ \exists f(x)$

  Esempio: provare che $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ ha la potenza del numerabile

  definiamo $\varphi : M \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mapsto a, b, c$

  sappiamo che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile

  segue che M è numerabile

- Dimostrazione per assurdo (o per esclusione)

  esempio: det. cardinalità $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ num. irrazionali

  sappiamo che $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$; $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

  $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ quindi se fosse $|\mathbb{I}| = \aleph_0$, risulterebbe anche $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ poiché unione di due insiemi numerabili

  deduciamo che $|\mathbb{I}| = \mathfrak{c}$