ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Algebra1: Insiemi Ciclici

UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

$A_3 = \{1, 2, 3\}$ $\sigma : A_3 \to A_3$

Una permutazione su tre elementi è un'applicaz. biunivoca

esempi di permutazione $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

In totale sono $n!$ permutazioni

↳ n numero di elementi

GRUPPO SIMMETRICO

Consideriamo l'insieme S_n delle permutazioni di tre elementi (cardinalità $n!$)
gli elementi dell'insieme saranno le permutazioni:

$$\alpha = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \dots \ \sigma(n))$$

corrispondenti alle permutazioni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

σ si chiama ciclo di lunghezza k (k-ciclo, con $k \leq n$) se permuta ciclicamente k elementi e lascia invariati gli altri:

es: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3-ciclo $(1\ 2\ 4)$

- 2-ciclo si chiama trasposizione o scambio
- due cicli sono disgiunti se operano su insiemi disgiunti di elementi

  es: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- se due cicli sono disgiunti $\Rightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$

Teorema

$\forall$ permutazione può essere scritta in maniera univoca (mod ordine dell'insieme) come prodotto (composizione) di cicli disgiunti

es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4) \circ (2\ 5)$

Teorema

$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r$ se $\sigma = \prod_{i=1}^{r}$ cicli disgiunti $\Rightarrow |\sigma| = \text{m.c.m}(|\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_r|)$

l'ordine di σ è uguale al minimo com. multiplo tra gli ordini dei cicli che compongono la permutazione σ

Teorema

$\forall$ permutazione può essere scritta come composizione di 2-cicli (scambi o Trasposizioni)

$$(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m) = (\alpha_1 \dots \alpha_m) \circ (\alpha_1\ \alpha_{m-1}) \circ \dots \circ (\alpha_1\ \alpha_2)$$

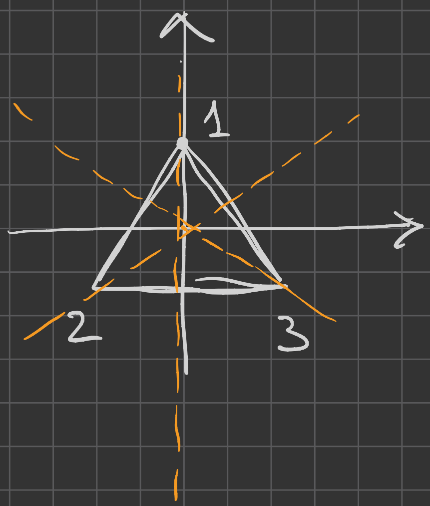
es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$

Teorema

Il gruppo simm S_n, per $n \geq 3$ è generato da $\{(1\ 2 \dots n), (1\ 2)\}$

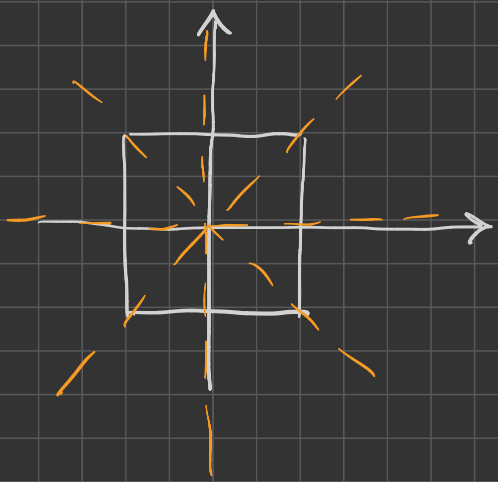
GRUPPO S_3

gruppo delle simmetrie di un triangolo equilatero



- identità
- n. 2 rotazioni
- n. 3 riflessioni lungo assi

GRUPPO S_4 (Diedrale)



- identità
- n° 3 rotazioni
- n. 4 riflessioni lungo assi

GRUPPI CICLICI

Sia $(G, *)$ un gruppo e $a \in G$

L'insieme $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di G ciclico generato da a

es $(\mathbb{Z}, +)$

- $a = 2$ genera $\{\dots -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ e si scrive $\langle 2 \rangle = \{\dots -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- $a = 1$ genera $\mathbb{Z}$ e si scrive $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$
- $a = -1$ genera $\mathbb{Z}$ e si scrive $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico generato da 1 oppure da -1

Def Se $\langle a \rangle$ è un insieme finito di cardinalità k si dice che a ha periodo k, altrimenti ∞

$$|\langle a \rangle| = k \Rightarrow \text{periodo } k$$

l'ordine di un elemento a il minimo intero positivo n, se ∃, tale che $a^n = id$ (corrisponde all'ordine del ciclo k-ciclo $\rightarrow$ periodo k

ES $(\mathbb{Z}_6, +)$ $\mathbb{Z} (\text{mod } 6)$

$\langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_6$ quindi 1 ha periodo 6

$\langle [2] \rangle = \{[2]\ [4]\ [0]\}$ quindi 2 ha periodo 3

ES S_3 gruppo di permutazioni di 3 elementi

$\langle 1\ 2 \rangle$ $\{(1\ 2), id\}$ quindi $(1\ 2)$ ha periodo 2

$\langle 1\ 2\ 3 \rangle$ $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), id\}$ quindi $(1\ 2\ 3)$ ha periodo 3

ESERCIZIO pag. 72 N°1

Det i generatori del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{12}$, descrivere i suoi sottogruppi e le relazioni di inclusione

$\mathbb{Z}_{12}$ $\quad \mathbb{Z} \bmod 12 \quad \{0_{12}, 1_{12}\ 2_{12} \dots 11_{12}\}$

1) Generatori $\quad MCD(x, 12) = 1$ coprimi

1 5 7 11

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1_{12} \rangle = \langle 5_{12} \rangle = \langle 7_{12} \rangle = \langle 11_{12} \rangle$$

2) sottogruppi divisori 12 del teorema di Lagrange

1, 2, 3, 4, 6, 12

$1 \rightarrow H_1 = \langle 12 \cdot 1_{12} \rangle = \langle 0_{12} \rangle = \{0_{12}\}$ ord 1

$2 \rightarrow H_2 = \langle \frac{12}{2} \cdot 1_{12} \rangle = \langle 0_{12}, 6_{12} \rangle = \{0_{12}, 6_{12}\}$ ord 2

$3 \rightarrow$

4

6

$12 \rightarrow H_{12} = \mathbb{Z}_{12}$