ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Algebra1:

Insiemi, Funzioni, Relazioni

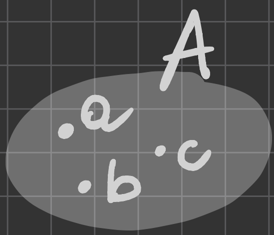
UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

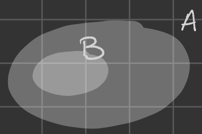
Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

1) INSIEMI collezioni di oggetti



$A=\{a,b,c,\dots\}$ $\qquad$ $A=\{x\in \mathbb{D} \mid \text{condizione}\}$

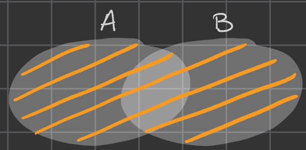
Inclusione $B\subseteq A$



$B\subseteq A = \{x \mid x\in B \rightarrow x\in A\}$

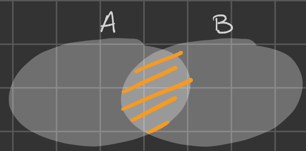
$B\subsetneq A = \{x \mid x\in B \rightarrow x\in A \wedge \exists a\in A \mid a\notin B\}$

Unione $A\cup B$



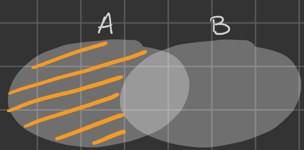
$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

Intersezione $A\cap B$



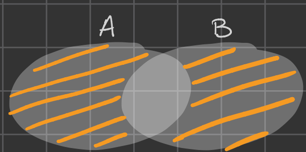
$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$

Differenza (o complementare) $A\setminus B$



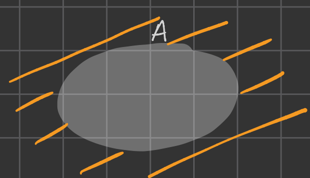
$A\setminus B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

Differenza simmetrica $A\triangle B$ $\quad A\oplus B$



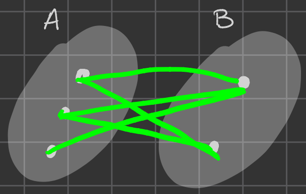
$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B \vee x\in A \wedge x\notin B\}$

Negazione $\bar{A}$ $\quad \neg A$



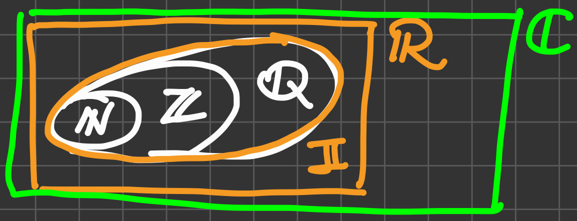
$\bar{A} = \{x \mid x\notin A\}$

Prodotto Cartesiano $A \times B$

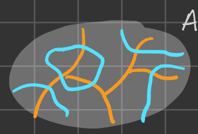


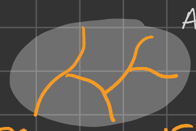
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ $\quad (a+ib)$



Insieme delle Parti di A $\wp(A)$





PARTIZIONE

$\wp(A) = \{B / B \subseteq A\}$ Partizione se $B_i \cap B_j = \emptyset$

Se A ha n elementi, $\wp(A)$ ha 2^n elementi

Esempio: $A = \{a, b, c\}$

$\wp(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ $\quad 2^3 = 8$ elementi

partizione$(A) = \{\{a\}, \{b, c\}\}$

" $= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

" $= \{\{a, b\}, \{c\}\}$

la partizione non è unica

2) RELAZIONI (corrispondenze)

$$R = (A \times B, G) \qquad \text{con } G \subseteq A \times B$$

$a R b$ b corrisponde ad a nella relazione R con $(a, b) \in G$

$R = (A \times B, G) = R' = (C \times D, G')$ se $A = C$, $B = D$, $G = G'$

$R = (A \times B, \emptyset)$ relazione vuota

$R = (A \times B, A \times B)$ relazione totale

$R' = (A' \times B', G')$ relazione indotta da $R = (A \times B, G)$
con $A' \subseteq A$ $B' \subseteq B$ $G' = (A' \times B') \cap (G \subseteq A \times B)$

$R^{-1} = (B \times A, G^{-1})$ relazione inversa di $R = (A \times B, G)$
con $G^{-1} = \{(b, a) \,/\, (a, b) \in G$

$R = (A \times A, G)$ relazione binaria su A

$$\begin{cases} a R a \ \forall a \in A & \text{RIFLESSIVA} \\ a \not R a \ \forall a \in A & \text{ANTIRIFLESSIVA} \\ aRb \Rightarrow bRa & \text{simmetrica} \\ aRb, bRa \Rightarrow a = b & \text{Asimmetrica} \\ aRb, bRc \Rightarrow aRc & \text{Transitiva} \end{cases}$$

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

RELAZIONE D'ORDINE

Relazioni di Ordine

LEMMA DI ZORN

L'ordine è una Relazione che soddisfa le proprietà:

Riflessività $x \leq x$

$\forall$ elemento è in relazione con se stesso

Antisimmetria $x \leq y \leq x \Leftrightarrow x = y$

Se x è in relazione con y ed y è in relazione con x, allora $x = y$

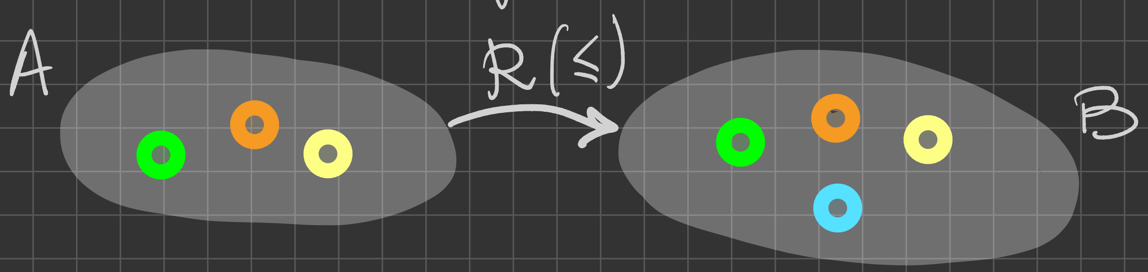
Transitività $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$

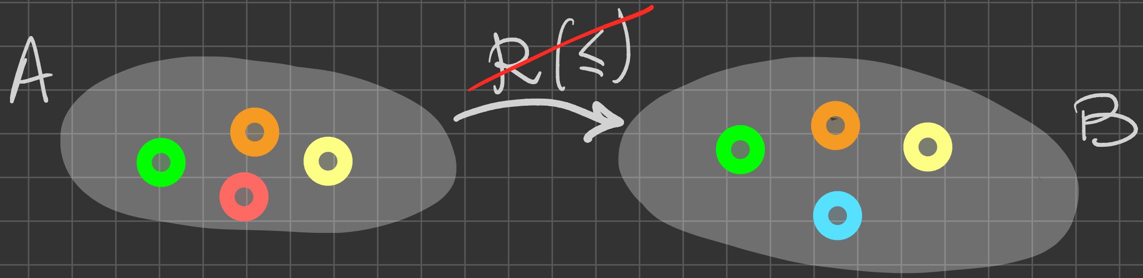
Se x è in relazione con y ed y è in relazione con z, allora x è in relazione con z

INCLUSIONE (Relazione d'ordine tra insiemi)

tra due insiemi contenenti elementi di natura eterogenea, possiamo definire una relazione d'ordine rispetto agli elementi degli insiemi.

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ A è più piccolo di B
(tutti gli elementi di A sono contenuti in B)

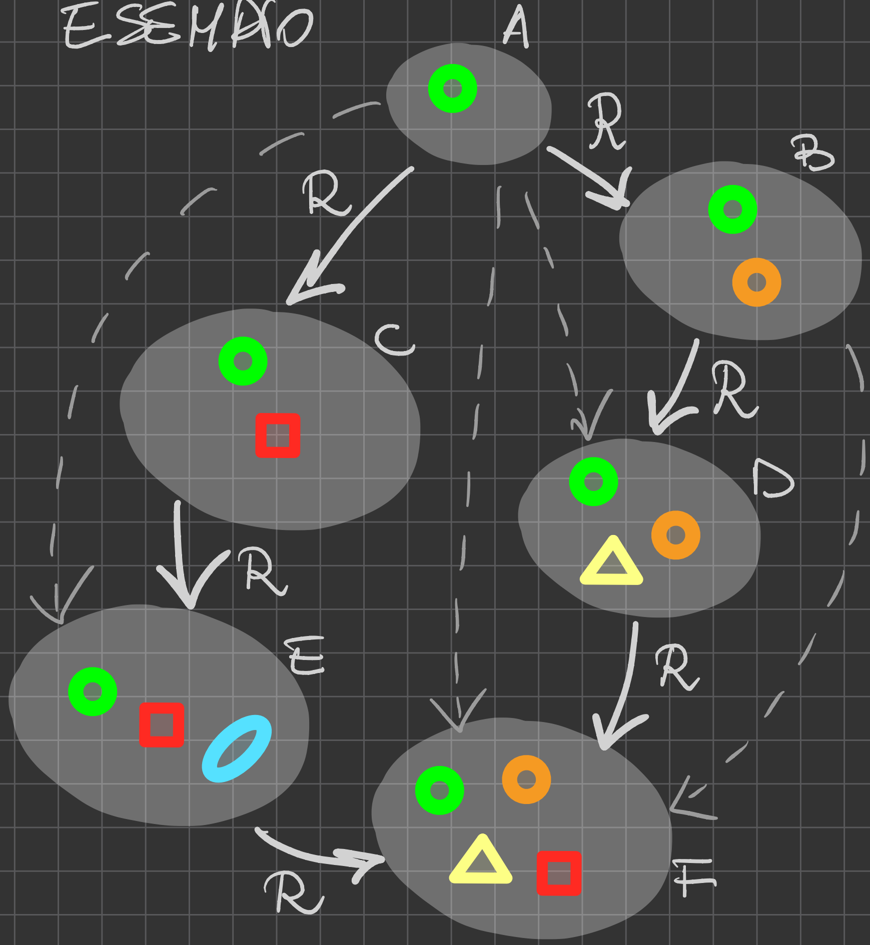




Ordine Totale: $\forall X$ e $Y \Rightarrow X \leq Y$ oppure $Y \leq X$
con X e Y insiemi con elementi eterogenei.

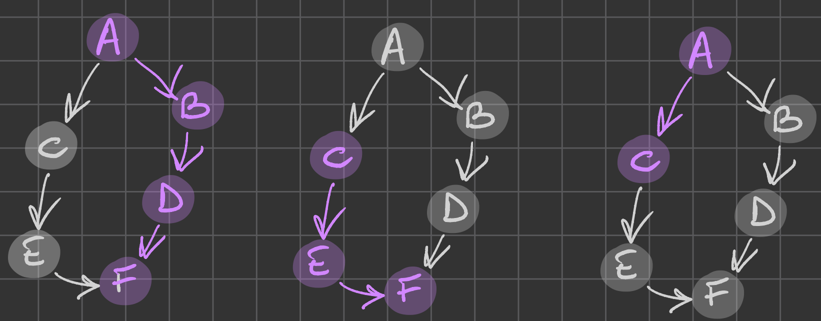
Ordine Parziale: non Totale

ESEMPIO

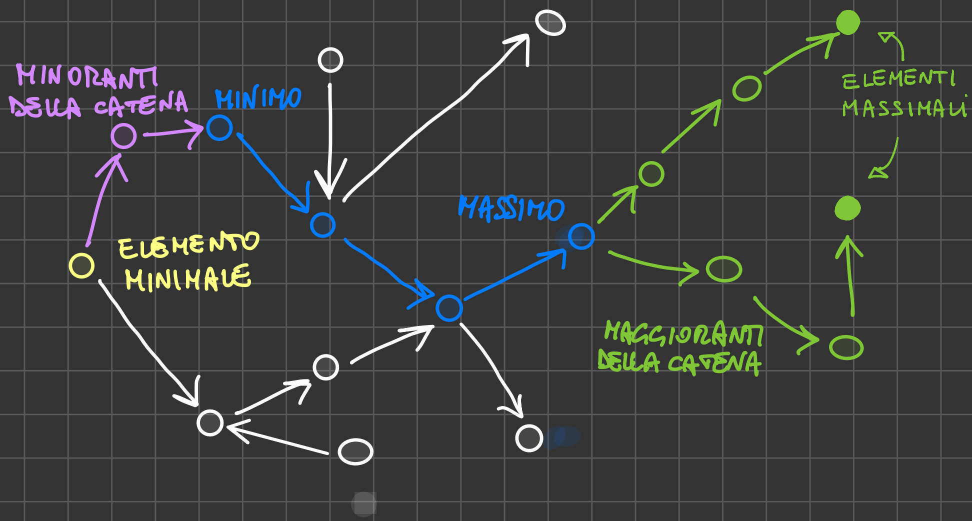


per la proprietà transitiva possiamo omettere le relazioni tratteggiate

DIAGRAMMA DI HASS



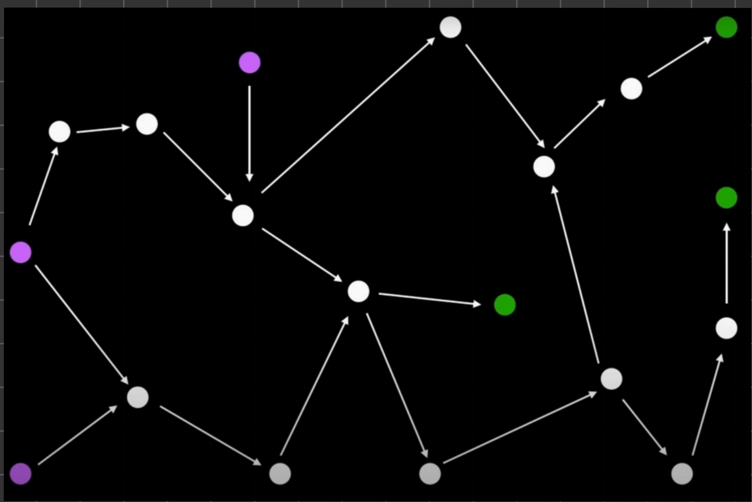
CATENA:
sottoinsieme in cui l'ordine è totale



- catena
- prolungamento delle catene in avanti
- prolungamento delle catene in senso contrario

Lemma di ZORN

Dato un insieme parzialmente ordinato, se ogni catena ammette maggioranti allora nell'insieme esistono elementi massimali



- elementi massimali
- elementi minimali

Esempi:

1) $\forall$ catena $\mathbb{N}$ ammette minimo, ma la catena dei numeri pari non ammette massimo quindi non ci sono elementi massimali
2) La catena dei numeri interi non ammette né max né min $\Rightarrow$ non ammette

maggioranti o minoranti e, di conseguenza, non ammette elementi massimali o minimali -

3) $\forall$ catena costruita su un insieme finito parzialmente ordinato ammette max e min, quindi elementi massimali e minimali.

Il nome LEMMA deriva dal fatto che è utilizzato per dimostrare numerosi teoremi, per esempio:

- Teorema di Zermelo
- Teorema di Hartogs
- Teorema dell'Infinito Minimo di N
- Lemma degli Ultrafiltri
- Lemma di Krull
- Teorema di Hahn-Banach
- Teorema di Esistenza della Base per Spazi Vettoriali
- Teorema di Alexander
- Teorema di Tychonoff

Il Lemma di Zorn è equivalente all'assioma della scelta

Relazione di equivalenza

$\mathcal{R}$ definita su A
- riflessiva $\forall a \in A \ (a \mathcal{R} a)$
- simmetrica $\forall a, b \in A \ (a \mathcal{R} b = b \mathcal{R} a)$
- transitiva $\forall a, b, c \in A \ (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c)$

Esempio:

$A = \mathbb{Z}$ $\mathcal{R}_1$: stesso quadrato

$A = \mathbb{Z}$ $\mathcal{R}_2$: somma dispari

$A = \wp(S)$ $\mathcal{R}_3$: intersezione nulla

$\mathcal{R}_1$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ x \mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

$\mathcal{R}_2$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ x \mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x + y$ dispari

$\mathcal{R}_3$ $\forall X, Y \in \wp(S), \ X \mathcal{R}_3 Y \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$

	Rifl.	A-Rifl.	Sim	A-Sim	Trans
$\mathcal{R}_1$	●		●		●
$\mathcal{R}_2$		●	●		
$\mathcal{R}_3$			●		

$\mathcal{R}_3$ non è riflessiva, a meno dell'elemento $\emptyset$

$\mathcal{R}_3$ non è antiriflessiva perché $\emptyset$ è in relazione con se stesso.

Unica relazione di equivalenza è $\mathcal{R}_1$

ESEMPIO:

$\mathcal{R}_1$: uguaglianza $\forall a, b \in A, \ a \mathcal{R}_1 b \Leftrightarrow a = b$

$\mathcal{R}_2$: relazione totale $\forall a, b \in A, \ a \mathcal{R}_2 b \ (\mathcal{R}_2 = A \times A)$
(tutti in relazione con tutti)

$\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$ sono "Relazioni di equivalenza banali"

nucleo di equivalenza

$f: A \to B$ con $A \neq \emptyset$

Def nucleo di eq. di f è la relazione
$\mathcal{R}_f : \forall x, y \in A,\ x \mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)$

Si dimostra facilmente che $\mathcal{R}_f$ è una relazione di equivalenza (propr. rifl. sim. trans)

classe di equivalenza

A insieme $\qquad \mathcal{R}$ relazione definita in A

Def classe di equivalenza di $a \in A$

RAPPRESENTANTE DELL'INSIEME A $\quad [a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A / x \mathcal{R} a\} = \{x \in A / a \mathcal{R} x\}$

Insieme di tutti gli elementi di A in relazione con l'elemento a. Per la proprietà riflessiva, ogni elemento è equivalente a se stesso, quindi le classi di equivalenza non sono mai vuote

ESEMPIO:

$A = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \qquad \mathcal{R}$: stesso n° di elementi
$\forall x, y \in A\ (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|)$

$[\emptyset]_{\mathcal{R}} = \{X \in A / X \mathcal{R} \emptyset\} = \{X \in A / |X| = \underbrace{|\emptyset|}_{0}\} = \{\emptyset\}$ singleton

$[\{1\}]_{\mathcal{R}} = \{X \in A / |X| = \underbrace{|\{1\}|}_{1}\} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\} = [\{2\}]_{\mathcal{R}} = [\{3\}]_{\mathcal{R}}$

$[\{1,2\}]_{\mathcal{R}} = X \in A / |X| = \underbrace{|\{1,2\}|}_{2}\} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} = [\{1,3\}]_{\mathcal{R}} = [\{2,3\}]_{\mathcal{R}}$

PROPRIETÀ delle classi di equivalenza

1) $[a]_R \neq \emptyset$ per la propr. riflessiva $a \in [a]_R$

2) $[a]_R = [b]_R \Leftrightarrow a R b$

3) $[a]_R \neq [b]_R \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Insieme Quoziente

$$\frac{A}{R} = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

Insieme di tutte le classi di un insieme

Partizione

$F \subseteq \mathcal{P}(A)$ è partizione di $A \Leftrightarrow$ 1) $\forall X \in F,\ X \neq \emptyset$

2) $\forall X, Y \in F,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

3) $\bigcup_{X \in F} = A$

ESEMPIO

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$F = \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4, 5\}\}$ è partizione

$F_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{2, 4, 5\}\}$ non è partizione

$F_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ non è partizione

Teorema fondamentale Rel. ep.

insieme quoziente
partizione $\Rightarrow$ Teorema fondamentale Rel equivalenza

1) Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza def. su A allora l'insieme quoziente $\frac{A}{\mathcal{R}}$ è una partizione di A

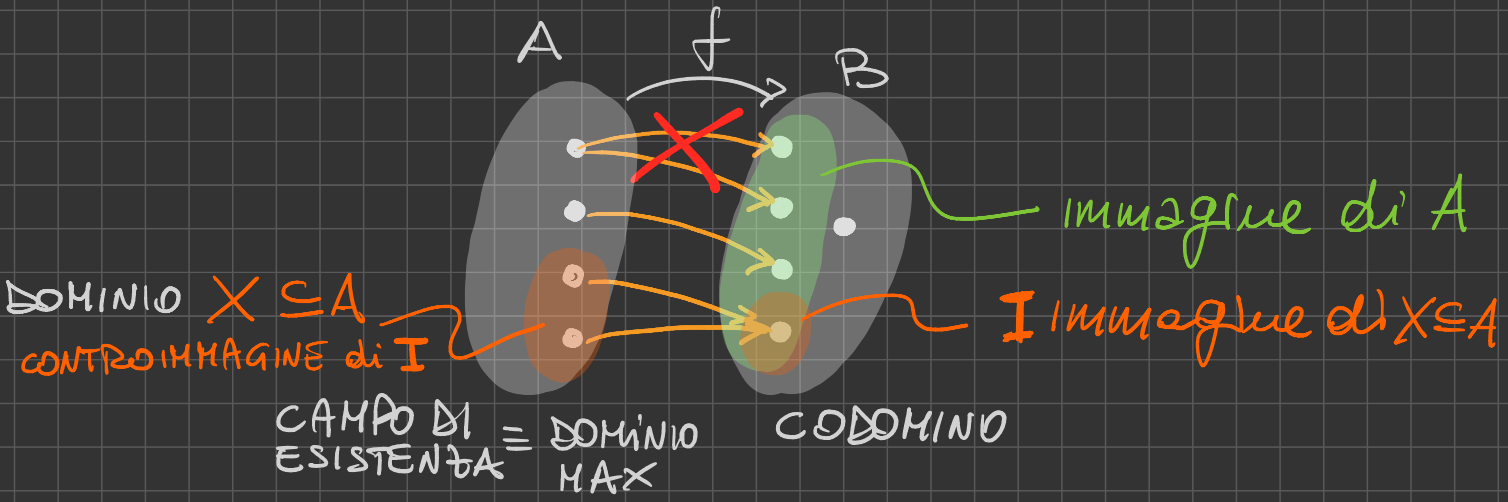
$$\mathcal{R} \text{ rel ep } \Rightarrow \frac{A}{\mathcal{R}} \text{ partizione di } A$$

2) Se F è una partizione di A, allora la relazione $\mathcal{R}_F$ che mette in corrispondenza elementi della stessa "parte" (sottoinsieme) di F è una relazione di equivalenza e risulta $\frac{A}{\mathcal{R}} = F$

$$F \text{ partizione } \Rightarrow \mathcal{R}_F : \forall x, y \in A,\ x \mathcal{R}_f y \Leftrightarrow \exists X \in F \,/\, \{x, y\} \subseteq X$$
$$\text{è rel. ep. e } \frac{A}{\mathcal{R}_f} = F$$

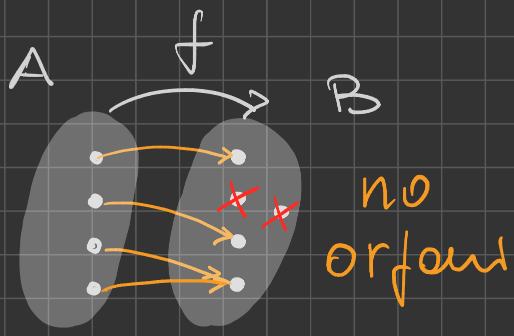
3) FUNZIONI (Applicazioni)

$f: A \to B \iff \forall a \in A \ \exists!\, b \in B \,/\, f(a) = b$ con $A, B \neq \emptyset$



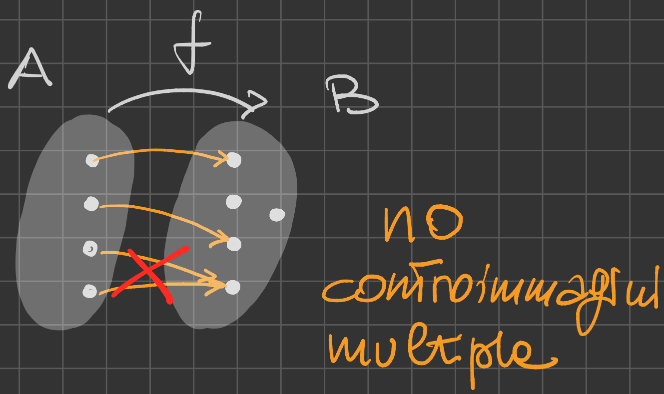
SURIETTIVA

$\forall y \in B \ \exists$ almeno una controimmagine $x \in A$



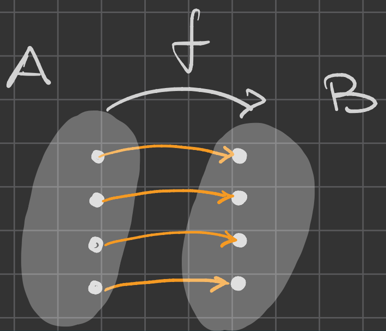
INIETTIVA

$\forall y \in B \ \exists$ al max una controimmagine $x \in A$



BIETTIVA

Suriettiva e iniettiva



funzioni uguali

$f: A \to B = g: C \to D$ se $\begin{cases} A = C \ ; \ B = D \\ f(a) = g(a) \ \forall a \in A \end{cases}$

ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad g(x) = x-1$

$f(x) = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \Rightarrow f(a) = g(a) \ \forall a \in A$

ma il campo di esistenza delle funzioni non è lo stesso $A \neq C$ quindi non sono uguali. $(A = \mathbb{R} - \{-1\} \ ; \ C = \mathbb{R})$

funzione identità $\boxed{id_A}$

$id_A : A \to A \qquad \forall a \in A, \ id_A : a \mapsto a$

funzione costante $\boxed{f_b}$ con $b \in B$

$f_b : A \to B \qquad \forall a \in A \ f(a) = b$

composizione di funzioni $\boxed{f \circ g}$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

esempio:

$\begin{cases} f(x) = x-1 \\ g(x) = \sqrt{x + \frac{3}{x}} \end{cases}$

$f \circ g = \overbrace{\sqrt{x + \frac{3}{x}}}^{g} - 1$ $\quad$ scrivo f sostituendo g(x) ad ogni x

$g \circ f = \sqrt{\underbrace{(x-1)}_{f} + \frac{3}{\underbrace{x-1}_{f}}}$ $\quad$ scrivo g sostituendo f(x) ad ogni x

funzione inversa f^{-1}

$f^{-1}: B \to A$ con $f: A \to B$ biunivoca

$f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_B$

f invertibile $\Leftrightarrow$ f iniettiva

funzione proiezione $\boxed{\pi_A , \pi_B}$

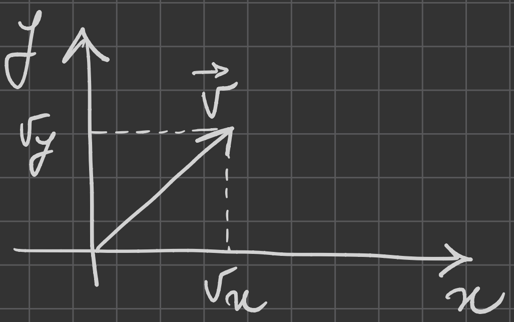
$\pi_A : A \times B \to A$ proiezione sulla prima componente

$\pi_B : A \times B \to B$ proiezione sulla seconda componente

esempio:

vettore $\vec{v}(v_x, v_y)$

$\vec{v} \xrightarrow{\pi_x} v_x \qquad v \xrightarrow{\pi_y} v_y$



Restrizione di f ad $A' \subseteq A$ $\boxed{f/_{A'}}$

$f/_{A'} : A' \to B$

se $f = id_A$, f è **immersione** di A' in A

se $f/_{A'} = g$, f è **prolungamento** di g ad A

funzione caratteristica

$\varphi_X : A \to \{0, 1\} \quad x \in A \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X \end{cases}$

con $X \subset A$

PRINCIPIO DI INDUZIONE (I)

$P(n)$ proposizione $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0)$

BASE INDUTTIVA $\begin{cases} P(n_0) \text{ è vera} \\ \forall n > n_0 \ (P(n-1) \Rightarrow P(n)) \end{cases}$ IPOTESI DEDUTTIVA $\Longrightarrow P(n)$ vera $\forall n \geq n_0$

ESEMPIO:

$P(n)$ = la somma dei primi $n \in \mathbb{N}$ è $\frac{n \cdot n+1}{2}$

BASE $n_0 = 1$ $\quad P(1) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ vera

PASSO $\forall n > 1$ $\quad P(n-1) \rightarrow P(n)$

supponiamo vera $P(n-1) = 1 + 2 + \dots n-1 = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$

$$P(n) = P(n-1) + n = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n =$$

$$= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

ESEMPIO:

$P(n)$ = la somma dei primi $n \in \mathbb{N} \,/\, n$ dispari è n^2

BASE: $n_0 = 1 \Rightarrow P(1) = 1 = 1^2$ vera

PASSO: $\forall n > 1$ $\quad P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$P(n-1) = 1 + 2 + 3 + \dots (n-1) = (n-1)^2$ con $(2n-1)$ e-mo numero dispari

$$P(n) = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots (2n-1) - 1}_{P(n-1) = (n-1)^2} + (2n-1)$$

$$P(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 \cancel{-2n} \cancel{+1} \cancel{+2n} \cancel{-1} = n^2$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE (II)

$P(n)$ proposizione $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0)$

BASE INDUTTIVA: $P(n_0)$ è vera

IPOTESI DEDUTTIVA: $\forall n > n_0 \; (\forall h \;\; n_0 < h < n \wedge P(h)) \Rightarrow P(n)$

$\Rightarrow P(n)$ vera $\forall n \geq n_0$

Definizione di numero primo

...

FUNZIONI BINARIE
(OPERAZIONE BINARIA)

≠ modalità di scrittura, stesso significato.

$$f : (a,b) \in A \times A \longrightarrow f((a,b)) \in A$$

$$* : (a,b) \in A \times A \longrightarrow a * b \in A$$

Applicazione che ad ogni coppia $(a,b) \in A \times A$ associa un elemento $\in A$

INSIEME DELLE PARTI di un Insieme

$$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$ ← sottoinsiemi di A

Es: $A = \{a, b\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{insieme vuoto}}, \underbrace{\{a\}}_{\text{singleton}}, \underbrace{\{b\}}_{\text{singleton}}, \underbrace{\{a,b\}}_{A} \}$