WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Algebra1: Coniugio

UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

Elementi coniugati in un gruppo

Se a, b sono elementi di un gruppo G, allora a e b sono coniugati ($a \, C_G \, b$) sse $\exists \, x \in G / a = x^{-1} b x$

Essere coniugati in un gruppo è una Relazione di equivalenza

Per $x, y, k \in G \Rightarrow (x \cdot y)^h = x^h \cdot y^h \Rightarrow$ Esprime il fatto che $x \mapsto x^h$ è un omomorfismo tra gruppi (in particolare è un automorfismo interno

Per $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x^h)^n = (x^n)^h$ elementi coniugati hanno lo stesso ordine

Se $H \leq G \Rightarrow H^g \leq G$ sono sottogruppi coniugati

NB $\quad g^h = g$ sse $gh = hg$

Coniugio in S_n

Se α e β sono permutazioni, per calcolare β^{α} basta scrivere β come prodotto di cicli ed applicare la formula

$$(i_1 \dots i_r)^{\alpha} := \alpha^{-1}(i_1 \dots i_r)\alpha = (i_1\alpha \dots i_r\alpha)$$

NB Due permutazioni sono coniugate in S_n sse hanno la stessa struttura ciclica

NB Le classi di coniugio in S_n corrispondono alle decomposizioni in cicli disgiunti

OSS Le classi di coniugio sono tante quante sono le strutture cicliche, quindi tante quante sono le partizioni di un numero

Per esempio in S_5

Esercizio 9 pag. 86

$S_7 \qquad \sigma = (1\,3\,5)(2\,7) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$\rho = (3\,1\,7)(5\,2)$

trovare $\tau \in S_7 \,/\, \rho = \tau \sigma \tau^{-1}$

ovvero provare che ρ è coniugata a σ

- σ e ρ hanno la stessa struttura ciclica, quindi sono coniugati.

deve essere: $\rho = \tau(\sigma)$

$$3 = \tau(1)$$
$$1 = \tau(3)$$
$$7 = \tau(5)$$
$$5 = \tau(2)$$
$$2 = \tau(7)$$

$$\Rightarrow \tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1, 3)(2\,5\,7)$$

Altro modo:

$$\begin{array}{ll} \sigma & (1\,3\,5)(2\,7) \\ & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow \\ \rho & (3\,1\,7)(5\,2) \end{array} \Rightarrow (1\,3)(5\,7\,2)$$

$$f = (1\ 3\ 4\ 2) \in S_5 \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g = (2\ 3\ 5) \in S_5 \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 4)$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 2)(3,4)$$